

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

45. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009*). Sei $r > 0$. Man berechne die Punkte auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kürzesten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$ auf der y -Achse. Für welche $r > 0$ ist $(0, 0)$ der Punkt mit dem kürzesten Abstand?
46. Man untersuche die folgenden Punktfolgen in \mathbb{R}^2 auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls ihren Grenzwert an:
- a) $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_k = \left(\frac{2k}{k+1}; \frac{k^2}{k^2+3} \right)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
 - b) $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_k = \left(\cos \frac{k\pi}{2}; \sin \frac{k\pi}{2} \right)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
 - c) $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k = \left(\left(1 + \frac{2}{k}\right)^k; \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2k} \right)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
 - d) $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k = \left(\sqrt[k]{k}; \sqrt{k+1} + (-1)^k \sqrt{k} \right)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Welche der Folgen besitzen Häufungspunkte?

47. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2001*). Sei Γ die durch die Parametrisierung

$$\gamma : \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) = (3t^2 - 1, 3t^3 - t),$$

gegebene geschlossene Kurve in der (x, y) -Ebene. Man berechne die Bogenlänge von Γ .

48. Gegeben sei die Kurve

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t).$$

- a) Man berechne den $f(t)$ und $f'(t)$ für $t \in \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right\}$.
- b) Man skizziere $f([0, 2\pi])$ für die *Kardioide (Herzkurve)* genannte Kurve f .
- c) Man berechne ihre Bogenlänge. (Hinweis: $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$.)