MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 8
02.07.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

29. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2005).* Man bestimme das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und zeige hiermit

$$\left|\cos\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - T_2(1)\right| \leq \frac{1}{6}.$$

30. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014).* Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (\pi - x)\cos(x).$$

a) Man bestimme die ersten drei Ableitungen f', f'' und f''' von f.

b) Man bestimme das Taylorpolynom T_2 von f im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

c) Man zeige für alle $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{\pi^3}{64}.$$

31. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 + x}.$$

a) Man bestimme mittels der Taylorformel ein Polynom p_2 zweiten Grades mit

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(f(x) - p_2(x)\right) = 0.$$

b) Man beweise für alle $x \in [0, \infty[$ die Abschätzung

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{16}x^3.$$

32. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2010).* Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x\,e^x - e^{-x}.$$

a) Man zeige, daß die Einschränkung von f auf $]-1, \infty[$ eine differenzierbare Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ besitzt.

b) Man berechne das Taylorpolynom ersten Grades T_1 von g um den Entwicklungspunkt -1.