MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 2
20.05.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 2\,x$.

   a) Man zeige, daß f eine bijektive Abbildung ist, und bestimme die Lösungen der beiden Gleichungen $f(x) = 1$ und $f(x) = 1 + \sqrt{e}$.

   b) Man zeige, daß die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und bestimme $\left(f^{-1}\right)'(1)$ und $\left(f^{-1}\right)'(1 + \sqrt{e})$.

6. Man bestimme den Wertebereich der Funktion

$$f : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x \cos x.$$

7. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 1999).* Man zeige, daß für alle a, $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left|\sin^3 b + \cos b - \sin^3 a - \cos a\right| \leq 4\,|b - a|$$

8. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2008).* Man beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

   und schließe hieraus

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1) \qquad \text{und} \qquad \ln(n) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - 1.$$