MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Repetitorium
31.07.2020

Repetitorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

1. a) Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf der Definitionsmenge $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ definiere man die Begriffe „f ist stetig im Punkt $a \in D$.“ und „f ist differenzierbar im Punkt $a \in D$.“ sowie „f ist stetig differenzierbar.“.

   b) *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2019).* Man zeige, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - x}{x^2}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

   stetig differenzierbar ist.

2. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2012).* Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

   a) Man bestimme das Verhalten von f an den Rändern von $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   b) Man bestimme die Monotonieintervalle von f und schließe damit auf Art und Lage der lokalen Extrema von f.

   c) Man skizziere den Graph G_f von f.

3. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2018).* Gegeben sei die Funktion

$$f : \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - 1}, & \text{für } x \neq 1, \\ 1, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

   a) Man beweise, daß f stetig ist.

   b) Man berechne $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   c) Man zeige etwa mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion ln: zu jedem $x > 1$ existiert ein $\xi \in \,]1, x[$ mit $f(x) = \frac{1}{\xi}$.

4. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2018).*

   a) Man zeige, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) + \arctan x,$$

   differenzierbar ist, und beweise $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   b) Man beweise unter Verwendung von a)

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$.

5. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2012).*

   a) Man formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und gebe eine geometrische Interpretation.

   b) Man zeige für alle a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Ungleichung
   $$\arctan b - \arctan a \leq b - a.$$

   c) Man zeige für alle a, $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ die Ungleichung
   $$|\cos(\ln b) - \cos(\ln a)| < \frac{b-a}{a}.$$

6. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2019).* Man zeige, daß für alle a, $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ die Beziehung
$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$
gilt.

7. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2014).*

   a) Für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem Definitionsintervall $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ definiere man die Begriffe
      - „$F : D \to \mathbb{R}$ ist eine Integralfunktion von f."
      - „$F : D \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f."

   b) Man entscheide, welche der folgenden Aussagen für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem Definitionsintervall $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ wahr bzw. falsch ist, und belege die Entscheidung über einen bekannten Satz oder ein Gegenbeispiel:
      - Jede Integralfunktion von f ist eine Stammfunktion von f.
      - Jede Stammfunktion von f ist eine Integralfunktion von f.

   c) Man zeige, daß die Funktion
   $$g : \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_1^x e^t \ln t \, dt,$$
   in $x = 1$ ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

8. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2012).* Für einen Parameter $a > 0$ werden die beiden Funktionen
$$F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_a(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + a^2} - x\right),$$
und
$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$
betrachtet.

   a) Man zeige, daß F_a eine Stammfunktion von f_a ist.

   b) Man berechne das Integral $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}a} f_a(x)\, dx$.

   c) Man zeige, daß F_a eine differenzierbare Umkehrfunktion F_a^{-1} besitzt, und bestimme $(F_a^{-1})'(\ln a)$.

9. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2012).*

   a) Man zeige $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x - \arctan x + C$.

   b) Man bestimme $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$ mit Hilfe partieller Integration.

   c) Man bestimme $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$ mit Hilfe der Substitution $x = t^6$.

10. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2017).* Man berechne

$$\int_0^1 \frac{2\,x^2 + 12\,x - 22}{x^2 + 6\,x - 16}\,dx.$$

11. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2014).*

   a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$–mal stetig differenzierbare Funktion auf dem Definitionsintervall $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ sowie $a \in D$. Man gebe das n–te Taylorpolynom T_n von f mit dem Entwicklungspunkt $a \in D$ sowie die Lagrangesche Darstellung des Restglieds R_{n+1} an.

   b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x + \pi) \cdot \sin x.$$

   - Man bestimme das zweite Taylorpolynom T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $a = \pi$.
   - Für alle $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ zeige man die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{\pi^4}{8}.$$

12. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2012).* Gegeben sei die Funktion

$$f : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x.$$

   a) Man bestimme das zweite Taylorpolynom T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$.

   b) Man zeige $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_2(x)}{x^2} = 0$.

   c) Man zeige $f(x) - T_2(x) > \frac{1}{3}\,x^3$ für alle $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

13. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2019).* Gegeben sei die Funktion

$$f : \left]-\infty, \tfrac{1}{4}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\,x}}.$$

   a) Man zeige mit vollständiger Induktion: für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} \cdot (1 - 4\,x)^{-(n+\frac{1}{2})} \qquad \text{für alle} \qquad x \in \left]-\infty, \tfrac{1}{4}\right[.$$

   b) Man bestimme die Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und berechne ihren Konvergenzradius.

14. Für den Punkt $a \in \mathbb{R}$ und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ betrachte man die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$$

mit dem Konvergenzradius $\varrho \in \mathbb{R}^+$.

a) *(Klausurteilaufgabe Sommersemester 2018).* Man erläutere, welche Konvergenz– und Divergenzaussagen für die Potenzreihe mit Hilfe ihres Konvergenzradius ϱ getroffen werden können, und veranschauliche diese Bereiche auf der Zahlengerade.

b) *(Klausurteilaufgabe Sommersemester 2016).* Man formuliere den Hauptsatz über Potenzreihen zu den Eigenschaften der Funktion

$$f : \,]a-\varrho, a+\varrho[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x_a)^n.$$

15. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2014).* Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (x-2)^n.$$

a) Man bestimme das Konvergenzintervall $D \subseteq \mathbb{R}$ dieser Potenzreihe; es sei

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (x-2)^n,$$

die von der Potenzreihe definierte Funktion.

b) Man begründe, daß f eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ besitzt, und gebe F zunächst als Potenzreihe und dann als elementare Funktion an.

c) Man bestimme hieraus eine Darstellung von f als elementare Funktion.

16. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2012).* Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \cdot (x-1)^n.$$

a) Man bestimme den Konvergenzradius ϱ dieser Potenzreihe; es sei

$$f : \,]1-\varrho, 1+\varrho[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \cdot (x-1)^n,$$

die von der Potenzreihe auf dem offenen Intervall $]1-\varrho, 1+\varrho[\, \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion.

b) Man begründe, daß f differenzierbar ist, und gebe die Ableitung f' von f zunächst als Potenzreihe und dann als elementare Funktion an.

c) Man bestimme hieraus eine Darstellung von f als elementare Funktion.

Bitte beachten: Die Aufgaben dieses Repetitoriums sollen der eigenständigen Wiederholung und Vertiefung des Stoffes vom Sommersemester dienen. Die Lösungsvorschläge werden zu gegebener Zeit veröffentlicht.