MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 11
24.07.2020

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

41. a) Die gegebene Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\, x^{2n}.$$

konvergiert zunächst in ihrem Entwicklungspunkt $a = 0$; für $x \neq 0$ gilt

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\, x^{2n} \neq 0 \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N},$$

und man erhält

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^n\, x^{2n+2}}{(n+1)\,(2n+1)} \cdot \frac{n\,(2n-1)}{(-1)^{n-1}\, x^{2n}}\right| = \left|(-1) \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \cdot x^2\right| \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \cdot x^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0} \cdot \frac{2-0}{2+0} \cdot x^2 = x^2.\end{aligned}$$

Folglich ist die Potenzreihe nach dem Quotientenkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 < 1$, also mit $|x| < 1$, (absolut) konvergent sowie
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 > 1$, also mit $|x| > 1$, divergent;

damit besitzt sie den Konvergenzradius $\varrho = 1$.

b) Die von der gegebenen Potenzreihe auf $]-\varrho, \varrho[$ definierte Funktion

$$f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\, x^{2n},$$

ist gemäß dem Hauptsatz über Potenzreihen beliebig oft (insbesondere also zweimal) differenzierbar, und für alle $x \in]-1, 1[$ ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)} \left(2n \cdot x^{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1}\, x^{2n-1}$$

sowie

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1} \left((2n-1) \cdot x^{2n-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot (-1)^{n-1}\right) x^{2n-2}$$

(Potenzreihen lassen sich „gliedweise“ differenzieren); unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe erhält man schließlich

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot (-1)^{n-1}\right) x^{2n-2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(x^2\right)^{n-1} =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \underset{|-x^2|=x^2<1}{=} 2 \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{2}{1+x^2}.$$

c) Aus der in b) gewonnenen Darstellung von f'' ergibt sich zunächst

$$f'(x) = 2 \arctan x + c_1 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \left]-1,1\right[$$

mit einer Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$; wegen

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1} \, 0^{2n-1} = 0 \qquad \text{und} \qquad \arctan 0 = 0$$

erhält man $c_1 = 0$, also $f'(x) = 2 \arctan x$ für alle $x \in \left]-1,1\right[$. Wegen

$$\int \underbrace{2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\arctan x}_{v(x)} \, dx = \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\arctan x}_{v(x)} - \int \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{v'(x)} \, dx =$$

$$= 2x \arctan x - \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = 2x \arctan x - \ln\left(1+x^2\right) + C$$

ergibt sich dann

$$f(x) = 2x \arctan x - \ln\left(1+x^2\right) + c_2 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \left]-1,1\right[$$

mit einer Konstante $c_2 \in \mathbb{R}$; wegen

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)} \, 0^{2n} = 0$$

sowie

$$\arctan 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \ln\left(1+0^2\right) = \ln 1 = 0$$

erhält man $c_2 = 0$, also $f(x) = 2x \arctan x - \ln(1+x^2)$ für alle $x \in \left]-1,1\right[$.

42. a) Die für den Parameter $a \neq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gegebene Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$ ist wegen

$$\frac{x^n}{a^{n+1}} = \frac{x^n}{a \cdot a^n} = \frac{1}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n \qquad \text{mit} \qquad c = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad q = \frac{x}{a}$$

und folglich wegen $c \neq 0$ genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$ gilt, also genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |a|$; in diesem Fall ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n = \frac{c}{1-q} = \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{x}{a}} = \frac{a \cdot \frac{1}{a}}{a \cdot \left(1-\frac{x}{a}\right)} = \frac{1}{a-x}.$$

b) Wir betrachten die gegebene Funktion

$$g : D_g \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)},$$

in ihrem maximalen Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ und bestimmen α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{2+x} \qquad \text{für alle} \quad x \in D_g.$$

Wegen

$$\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{2+x} = \frac{\alpha\,(2+x) + \beta\,(1+x)}{(1+x)(2+x)} = \frac{(\alpha+\beta)\,x + (2\,\alpha+\beta)}{(1+x)(2+x)}$$

für alle $x \in D_g$ liefert der Koeffizientenvergleich

$$\alpha + \beta = 0 \qquad \text{und} \qquad 2\,\alpha + \beta = 1,$$

also $\alpha = 1$ und $\beta = -1$, und somit

$$g(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{-1}{2+x} \qquad \text{für alle} \quad x \in D_g.$$

Für die beiden Summanden ergibt sich zum einen mit Hilfe der Summenformel für geometrische Reihen

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{für alle} \quad |x| < 1$$

und zum anderen unter Verwendung von Teilaufgabe a)

$$\frac{-1}{2+x} = \frac{1}{(-2)-x} \underset{a=-2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(-2)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} x^n \quad \text{für alle} \quad |x| < 2,$$

so daß sich für $|x| < 1$ insgesamt

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{-1}{2+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n \end{aligned}$$

und damit für die Funktion g die Taylorreihe

$$T_g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{mit} \quad c_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N}_0$$

mit dem Einwicklungspunkt 0 ergibt. Da $T_g(x)$ für alle $|x| < 1$ konvergiert, gilt für den Konvergenzradius der Taylorreihe $\varrho \geq 1$; für $x = -1$ gilt

$$c_n x^n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot (-1)^n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1,$$

so daß die Folge $(c_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder keine Nullfolge ist und folglich die Taylorreihe $T_g(-1)$ divergiert. Damit gilt auch $\varrho \leq 1$, insgesamt $\varrho = 1$.

43. Gegeben ist die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt.$$

a) Die Cosinusreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos z,$$

so daß sich

$$\cos(t^2) \underset{z=t^2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, t^{4k}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ ergibt; nach dem Hauptsatz über Potenzreihen darf diese Potenzreihe gliedweise integriert werden, und wir erhalten

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \cos(t^2)\, dt = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, \frac{t^{4k+1}}{4k+1} \right]_0^x = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, \frac{x^{4k+1}}{4k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, \frac{0^{4k+1}}{4k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!\,(4k+1)}\, x^{4k+1} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, also die Taylorreihe von F mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$.

b) Gemäß a) besitzt die Taylorreihe von F mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ die Gestalt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit den Koeffizienten

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!\,(4k+1)}, & \text{falls } n = 4k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen gilt für die n–te Ableitung von F im Entwicklungspunkt $a = 0$ stets

$$F^{(n)}(0) = n!\,c_n \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N},$$

so daß sich im Falle $n = 4k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ dann

$$F^{(n)}(0) = (4k+1)! \cdot \frac{(-1)^k}{(2k)!\,(4k+1)} = (-1)^k\,\frac{(4k)!}{(2k)!}$$

und in den anderen Fällen $F^{(n)}(0) = 0$ ergibt.

44. a) Zunächst ist die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ \alpha & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

unabhängig von der Wahl des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ zumindest in allen Punkten $a \neq 0$ (als Quotient zweier stetiger Funktionen) stetig. Für den Punkt $a = 0$ ergibt eine zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\,x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2};$$

folglich ist f genau dann im Punkt $a = 0$ stetig und damit eine stetige Funktion, wenn $\alpha = f(0) = \frac{1}{2}$ gilt.

b) Mit Hilfe der Cosinusreihe ergibt sich zunächst für alle $x \neq 0$ die Potenzreihendarstellung

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}\right) = \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}\right)\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\,x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\,x^{2n}; \end{aligned}$$

diese ist wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\,0^{2n} = \frac{(-1)^0}{2!}\,0^0 = \frac{1}{2} = f(0)$$

auch für den Punkt $x = 0$ gültig. Damit stellt die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\,x^{2n}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ die Funktion f dar; diese ist damit nach dem Hauptsatz über Potenzreihen beliebig oft differenzierbar mit

$$f^{(2n)}(0) = (2n)! \cdot c_{2n} = (2n)! \cdot \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

und

$$f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! \cdot c_{2n+1} = (2n+1)! \cdot 0 = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.