MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 10
17.07.2020

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

37. a) Die gegebene Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a=1$ sowie die Koeffizienten $c_n=(-1)^n(n+1)$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{(-1)^n(n+1)}\right| = \frac{n+2}{n+1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho=\frac{1}{1}=1$; damit ist diese für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-1|<1$ konvergent sowie für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-1|>1$ divergent. Für die verbleibenden Punkte $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-1|=1$ gilt

$$|(-1)^n(n+1)(x-1)^n| = |(-1)^n|\,(n+1)\,|x-1|^n = n+1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

weswegen die Folge $((-1)^n(n+1)(x-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder keine Nullfolge und folglich die Potenzreihe divergent ist. Insgesamt ergibt sich wegen

$$|x-1|<1 \iff -1<x-1<1 \iff 0<x<2$$

das Konvergenzintervall $]0;2[$ für die gegebene Potenzreihe.

b) Durch die gegebene Potenzreihe wird gemäß a) die Funktion

$$f:\,]0;2[\,\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n,$$

definiert; nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist f stetig, insbesondere also integrierbar, und die gliedweise integrierte Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{n+1}$$

stellt eine Stammfunktion von f dar; damit ergibt sich

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt = \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(t-1)^{n+1}\right]_1^x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{n+1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 0^{n+1}}_{=0} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{n+1}$$

für alle $x\in\,]0;2[$.

c) Für alle $x \in \,]0;2[$ gilt unter Verwendung der geometrischen Summenformel

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n = \frac{c}{1-q}$$

für $c = x-1$ und $q = 1-x$ mit $|q| = |1-x| < 1$ zunächst

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \,(x-1) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)(1-x)^n = \frac{x-1}{1-(1-x)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

und damit dann mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential– und Integralrechnung

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

38. a) Bei der zu untersuchenden Reihe

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}\, x^n$$

handelt es sich um eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $a = 0$ mit den Koeffizienten $c_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\begin{aligned} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}{(-1)^n} \right| = \left| \frac{(-1)\cdot\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+2}} \right| = \\ &= \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+2}} = \sqrt[3]{\frac{n}{n+2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt[3]{\frac{1}{1+0}} = \sqrt[3]{1} = 1 = c \end{aligned}$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 1$; damit ist sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Für die beiden noch verbleibenden Punkte $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$ gilt:

- Für $x = -1$ ergibt sich

$$S_0(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-(-1))^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}};$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dabei

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n},$$

so daß $S_0(-1)$ die divergente Minorante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n}$ besitzt und daher nach dem Minorantenkriterium selbst divergent ist.

- Für $x = 1$ ergibt sich

$$S_0(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}};$$

da $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ist $S_0(1)$ nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium für alternierende Reihen konvergent.

b) Durch gliedweises Differenzieren der Summanden von $S_0(x)$ ergibt sich die Potenzreihe

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} \cdot n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}\, x^n$$

um den Punkt $a = 0$ mit den Koeffizienten $c_n' = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; sie besitzt denselben Konvergenzradius $\varrho = 1$ wie $S_0(x)$; damit ist auch sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Ferner gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$

$$\begin{aligned}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}\, x^n\right| &= \frac{n+1}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}\,|x|^n = \frac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n+2}} \cdot \sqrt[3]{n+1} = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{n+1}}_{\to\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty;\end{aligned}$$

damit bilden die Reihenglieder von $S_1(x)$ insbesondere keine Nullfolge, weswegen die Reihe $S_1(x)$ nicht konvergieren kann.

c) Gemäß a) ist $I_0 =]-1;1] \subseteq \mathbb{R}$ das Konvergenzintervall der Potenzreihe S_0; diese definiert daher die Funktion

$$f :]-1;1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = S_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}\, x^n.$$

Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist f eine auf dem offenen Intervall $]-1;1[$ beliebig oft differenzierbare Funktion, und für alle $x \in]-1;1[$ erhält man durch gliedweises Differenzieren von $S_0(x)$ eine Potenzreihendarstellung von f', damit gilt also $f'(x) = S_1(x)$; für $x = 1$ ist $S_1(1)$ nicht konvergent.

39. a) Die gegebene Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n\,(n-1)}{(n+1)\,n} = \frac{n-1}{n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1-0}{1+0} = 1 = c$$

gilt für den Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe $\varrho = \dfrac{1}{c} = 1$; damit ist die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Ferner gilt für $x \in \{-1; 1\}$

$$|c_n\, x^n| = |c_n| = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$; damit besitzt in diesem Fall die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, x^n$ die konvergente Majorante $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

b) Da die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)}$ gemäß a) den Konvergenzradius $\varrho = 1$ besitzt, definiert sie die beliebig oft differenzierbare Funktion

$$f :]-1; 1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)},$$

mit

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n\, x^{n-1}}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n-1}}{n-1}$$

sowie

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n-1)\, x^{n-2}}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n-2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Daneben betrachten wir die ebenfalls beliebig oft differenzierbare Funktion

$$g :]-1; 1[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = -x + (1+x)\, \ln(1+x),$$

und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} g'(x) &= -1 + \left(1 \cdot \ln(1+x) + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x}\right) = \\ &= -1 + \ln(1+x) + 1 = \ln(1+x) \end{aligned}$$

sowie

$$g''(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt demnach

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-x)^{n-2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = g''(x) \end{aligned}$$

und folglich $f'(x) = g'(x) + c_1$ mit einer geeigneten Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$; speziell im Entwicklungspunkt $a = 0$ ergibt sich $f'(0) = 0$ sowie $g'(0) = \ln 1 = 0$ und damit $c_1 = 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt also $f'(x) = g'(x)$ und folglich $f(x) = g(x) + c_0$ mit einer geeigneten Konstante $c_0 \in \mathbb{R}$; speziell im Entwicklungspunkt $a = 0$ ergibt sich $f(0) = 0$ sowie $g(0) = \ln 1 = 0$ und damit auch $c_0 = 0$. Insgesamt erhält man also

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)} = f(x) = g(x) = -x + (1+x)\, \ln(1+x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

40. a) Durch zweimalige partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\, e^x\, dx &= \int_0^1 \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)}\, dx = \Big[\underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)} \Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{2x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)}\, dx \\
&= \Big[1^2 \cdot e^1 - 0^2 \cdot e^0 \Big] - 2 \cdot \int_0^1 \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)}\, dx \\
&= e - 2 \cdot \left(\Big[\underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)} \Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)}\, dx \right) \\
&= e - 2 \cdot \left(\Big[1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 \Big] - \int_0^1 e^x\, dx \right) \\
&= e - 2 \cdot \left(e - \big[e^x \big]_0^1 \right) = e - 2 \cdot \left(e - \big[e^1 - e^0 \big] \right) \\
&= e - 2 \cdot \left(e - \big[e - 1 \big] \right) = e - 2 \cdot 1 = e - 2.
\end{aligned}$$

b) Gemäß a) gilt zunächst

$$e = 2 + \int_0^1 x^2\, e^x\, dx,$$

und wir haben noch

$$\int_0^1 x^2\, e^x\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+3) \cdot k!}$$

zu zeigen. Für die Integrandenfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2\, e^x,$$

ergibt sich unter Verwendung der für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergenten Exponentialreihe die Potenzreihendarstellung

$$f(x) = x^2 \cdot e^x = x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R};$$

gemäß dem Hauptsatz über Potenzreihen stellt die gliedweise integrierte Potenzreihe eine Stammfunktion F der stetigen Funktion f dar, es gilt also

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+3}}{(k+3) \cdot k!},$$

und nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \, e^x \, dx &= \int_0^1 f(x) \, dx = \Big[F(x) \Big]_0^1 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+3}}{(k+3) \cdot k!} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^{k+3}}{(k+3) \cdot k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^{k+3}}{(k+3) \cdot k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+3) \cdot k!}. \end{aligned}$$