MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 8
03.07.2020

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

29. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(x^2\right),$$

ist als Hintereinanderausführung von Sinus und der Quadratfunktion beliebig oft differenzierbar, und unter Verwendung der Kettenregel sowie (für die höheren Ableitungen) der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = \cos\left(x^2\right) \cdot (2\,x) = 2\,x \cdot \cos\left(x^2\right)$$

und

$$f''(x) = 2 \cdot \cos\left(x^2\right) + 2\,x \cdot \left(-\sin\left(x^2\right) \cdot (2\,x)\right) = 2\,\cos\left(x^2\right) - 4\,x^2 \cdot \sin\left(x^2\right)$$

sowie (für die bei b) benötigte Restglieddarstellung)

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2\left(-\sin\left(x^2\right) \cdot (2\,x)\right) - \left(8\,x \cdot \sin\left(x^2\right) + 4\,x^2 \cdot \left(\cos\left(x^2\right) \cdot (2\,x)\right)\right) \\ &= -4\,x \cdot \sin\left(x^2\right) - \left(8\,x \cdot \sin\left(x^2\right) + 8\,x^3 \cdot \cos\left(x^2\right)\right) \\ &= -12\,x \cdot \sin\left(x^2\right) - 8\,x^3 \cdot \cos\left(x^2\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(0) = 2,$$

und man erhält für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und x mit $R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\,x^3$ gibt; es ist damit

$$f(x) - T_2(x) = R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\,x^3.$$

Speziell für $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ gilt auch $\xi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, und wir erhalten in

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_2(x)| &= |R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\,x^3\right| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot \left|x^3\right| \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left|-12\,\xi \cdot \sin\left(\xi^2\right) - 8\,\xi^3 \cdot \cos\left(\xi^2\right)\right| \cdot |x|^3 \\
&\le \frac{1}{6} \cdot \left(12 \cdot \underbrace{|\xi|}_{\le \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\xi^2\right)\right|}_{\le 1} + 8 \cdot \underbrace{|\xi|^3}_{\le \left(\frac{1}{2}\right)^3} \cdot \underbrace{\left|\cos\left(\xi^2\right)\right|}_{\le 1}\right) \cdot \underbrace{|x|^3}_{\le \left(\frac{1}{2}\right)^3} \\
&\le \frac{1}{6} \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1\right) \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{7 \cdot \frac{1}{8}}_{\le 1} \le \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

die Behauptung.

30. a) Die gegebene Funktion

$$f : \,]-1, \infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x},$$

ist (als gebrochenrationale Funktion) beliebig oft stetig differenzierbar, und für alle $x > -1$ gilt

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$$

und damit

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (-2) \cdot (1+x)^{-3}, \\
f'''(x) &= (-2)(-3) \cdot (1+x)^{-4}, \\
f^{(4)}(x) &= (-2)(-3)(-4) \cdot (1+x)^{-5},
\end{aligned}$$

wodurch die Vermutung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

nahegelegt wird; diese bestätigen wir mittels vollständiger Induktion:

- Für den Induktionsanfang „$n = 1$“ ergibt sich

$$f'(x) = (1+x)^{-2} = (-1)^{1-1} \cdot 1! \cdot (1+x)^{-(1+1)}.$$

- Für den Induktionsschritt „$n \to n+1$“ erhält man aus der Induktionsvoraussetzung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)}$$

wegen

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\
&= (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot \left(-(n+1) \cdot (1+x)^{-(n+1)-1}\right) \\
&= (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot \left((-1) \cdot (n+1) \cdot (1+x)^{-((n+1)+1)}\right) \\
&= (-1)^{(n+1)-1} \cdot (n+1)! \cdot (1+x)^{-((n+1)+1)}
\end{aligned}$$

die Induktionsbehauptung.

b) Für den Entwicklungspunkt $a = 2$ ergibt sich

$$f(2) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

sowie mit den in a) ermittelten Ableitungen

$$f'(2) = (1+2)^{-2} = \frac{1}{9} \qquad \text{und} \qquad f''(2) = (-2) \cdot (1+2)^{-3} = -\frac{2}{27};$$

für das zweite Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ erhält man damit

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(2) + f'(2) \cdot (x-2) + \frac{f''(2)}{2} \cdot (x-2)^2 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{9}(x-2) - \frac{1}{27}(x-2)^2 \end{aligned}$$

für alle $x > -1$.

c) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x > -1$, wobei es zu jedem $x > -1$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes $R_3(x)$ ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 2$ und x mit

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-2)^3$$

gibt; für alle $x \in [1,3]$ gilt $|x-2| \leq 1$ und damit auch $|\xi - 2| \leq 1$, insbesondere also $\xi \geq 1$, und wir erhalten

$$|f'''(\xi)| = \left|6 \cdot (1+\xi)^{-4}\right| = 6 \cdot \underbrace{(1+\xi)}_{\geq 2}{}^{-4} \leq 6 \cdot 2^{-4} = \frac{6}{16}$$

und damit

$$\begin{aligned} |f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-2)^3\right| &= \\ = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{|f'''(\xi)|}_{\leq \frac{6}{16}} \cdot \underbrace{|x-2|}_{\leq 1}{}^3 \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{16} \cdot 1^3 &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

31. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sin x$, ist als Produkt der Exponentialfunktion und des Sinus beliebig oft differenzierbar; mit Hilfe der Produktregel erhält man

- $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$,
- $f''(x) = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = 2\, e^x \cos x$,
- $f'''(x) = 2\, e^x \cos x + 2\, e^x (-\sin x) = 2\, e^x (\cos x - \sin x)$,
- $f^{(4)}(x) = 2\, e^x (\cos x - \sin x) + 2\, e^x (-\sin x - \cos x) = -4\, e^x \sin x$ und
- $f^{(5)}(x) = -4\, e^x \sin x - 4\, e^x \cos x = -4\, e^x (\sin x + \cos x)$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 2, \qquad f'''(0) = 2 \quad \text{und} \quad f^{(4)}(0) = 0$$

ergibt sich für das vierte Taylorpolynom T_4 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_4(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Taylorformel gilt nun $f(x) = T_4(x) + R_5(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ_x zwischen $a = 0$ und x mit $R_5(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}\,x^5$ gibt. Für $x \neq 0$ erhält man damit

$$\frac{f(x) - T_4(x)}{x^4} = \frac{R_5(x)}{x^4} = \left(\frac{f^{(5)}(\xi_x)}{120}\,x^5\right) \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{x}{120} \cdot f^{(5)}(\xi_x);$$

beim Grenzübergang $x \to 0$ ergibt sich auch $\xi_x \to 0$, woraus wegen der Stetigkeit der fünften Ableitung $f^{(5)}$ dann $f^{(5)}(\xi_x) \to f^{(5)}(0) = -4$ folgt. Insgesamt erhält man also

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_4(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{x}{120}}_{\to 0} \cdot \underbrace{f^{(5)}(\xi_x)}_{\to -4}\right) = 0 \cdot (-4) = 0.$$

Wir können also $p = T_4$ wählen. Des weiteren gilt

$$|f(x) - T_4(x)| = |R_5(x)| = \left|\frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}\,x^5\right| = \left|-4\,e^{\xi_x}\,(\sin\xi_x + \cos\xi_x)\right| \cdot \frac{|x|^5}{120} \leq$$

$$\leq 4\,e^{\xi_x}\left(\underbrace{|\sin\xi_x|}_{\leq 1} + \underbrace{|\cos\xi_x|}_{\leq 1}\right) \cdot \frac{|x|^5}{120} \underset{\xi_x \leq \frac{1}{2}}{\leq} 8\,e^{\xi_x} \cdot \frac{|x|^5}{120} \underset{|x| \leq \frac{1}{2}}{\leq} 8\,e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120} = \frac{\sqrt{e}}{480}$$

für alle $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; dabei geht ein, daß die Exponentialfunktion monoton wächst.

32. a) Für $x \in [0, \pi]$ betrachten wir das dritte Taylorpolynom T_3 des Sinus zum Entwicklungspunkt $a = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \sin 0 + \sin' 0 \cdot x + \frac{\sin'' 0}{2} \cdot x^2 + \frac{\sin''' 0}{6} \cdot x^3 \\ &= \sin 0 + \cos 0 \cdot x + \frac{-\sin 0}{2} \cdot x^2 + \frac{-\cos 0}{6} \cdot x^3 \underset{\cos 0 = 1}{\overset{\sin 0 = 0}{=}} x - \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

Nach der Taylorformel gilt nun $\sin x = T_3(x) + R_4(x)$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen $a = 0$ und x mit

$$R_4(x) = \frac{\sin^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x^4 = \frac{\sin\xi}{4!} \cdot x^4$$

gibt; wegen $x \in [0, \pi]$ ist auch $\xi \in [0, \pi]$, und wegen $\sin\xi \geq 0$ ergibt sich

$$\sin x = T_3(x) + R_4(x) = T_3(x) + \underbrace{\frac{\sin\xi}{4!} \cdot x^4}_{\geq 0} \geq T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

b) Die Polynomfunktion

$$p : [\pi, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad p(x) = x - \frac{x^3}{6},$$

ist differenzierbar, und für alle $x \geq \pi$ gilt

$$p'(x) = 1 - \frac{3\,x^2}{6} = 1 - \frac{x^2}{2} \underset{x \geq \pi \geq 3}{\leq} 1 - \frac{3^2}{2} = -\frac{7}{2} \leq 0;$$

damit ist p auf dem Intervall $[\pi, +\infty[$ monoton fallend, und für alle $x > \pi$ ergibt sich

$$p(x) \leq p(\pi) = \pi - \frac{\pi^3}{6} \underset{\pi \geq 3}{\leq} \pi - \frac{3^3}{6} \underset{\pi \leq \frac{7}{2}}{\leq} \frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -1,$$

insbesondere also

$$\sin x \geq -1 \geq p(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$