

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

25. Wir betrachten die gebrochenrationale Funktion

$$\varphi :]0, 3[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \pi \frac{3x - 3}{3x - x^2},$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \pi \cdot \frac{3x - 3}{x \cdot (3 - x)} = \pi \cdot \frac{2x + (x - 3)}{x \cdot (3 - x)} = \pi \cdot \frac{2x - (3 - x)}{x \cdot (3 - x)} = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{2x}{x \cdot (3 - x)} - \frac{3 - x}{x \cdot (3 - x)} \right) = \pi \cdot \left(\frac{2}{3 - x} - \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

für alle $x \in]0, 3[$, insbesondere also

$$\varphi(1) = \pi \cdot \left(\frac{2}{3 - 1} - \frac{1}{1} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(2) = \pi \cdot \left(\frac{2}{3 - 2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi}{2};$$

die Funktion φ ist stetig differenzierbar, und für alle $x \in]0, 3[$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \pi \cdot \left(-\frac{2}{(3 - x)^2} \cdot (-1) - \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{2}{(3 - x)^2} + \frac{1}{x^2} \right) = \pi \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2 - 6x + 9} \right). \end{aligned}$$

Für das zu berechnende Integral ergibt sich mit der Substitutionsregel (*) im Hinblick auf die Stetigkeit des Cosinus

$$\begin{aligned} \int_1^2 \cos \left(\pi \frac{3x - 3}{3x - x^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2 - 6x + 9} \right) dx &= \\ &= \int_1^2 \cos(\varphi(x)) \cdot \frac{\varphi'(x)}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_1^2 \cos(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx \stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} \cos u \, du = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos u \, du = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\sin u \right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin \frac{3\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{1}{\pi} \cdot ((-1) - 0) = -\frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

26. Die zu betrachtenden bestimmten Integrale

$$\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{und} \quad \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2}$$

besitzen unterschiedliche Integrationsgrenzen, wodurch die Anwendung der Substitutionsregel nahegelegt wird. Mit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

und der Substitution

$$g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = \frac{1}{t},$$

mit

$$g'(t) = -\frac{1}{t^2} \quad \text{für alle} \quad t \in]0, \infty[$$

erhält man

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{g(1)}^{g(a)} f(x) dx = \int_1^a f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \\ &= \int_1^a \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = - \int_1^a \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int_a^1 \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}$$

und damit die zu zeigende Gleichheit

$$\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Unter Verwendung der Stammfunktion $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von f ergibt sich damit

$$[\arctan x]_a^1 = [\arctan]_1^{\frac{1}{a}},$$

also

$$\arctan 1 - \arctan a = \arctan \frac{1}{a} - \arctan 1,$$

woraus sich wegen $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ die Funktionalgleichung des Arcus tangens

$$\arctan \frac{1}{a} + \arctan a = \frac{\pi}{2}.$$

ergibt.

27. a) Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \int \underbrace{x^{-\frac{1}{2}}}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{u(x)} dx = \underbrace{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}_{v(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{u(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}_{v(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} dx = \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x} (\ln x - 2) + C. \end{aligned}$$

Für alle $0 < \alpha < e$ gilt damit

$$\int_{\alpha}^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}(\ln x - 2)]_{\alpha}^e = 2\sqrt{e}(\ln e - 2) - 2\sqrt{\alpha}(\ln \alpha - 2),$$

wobei sich mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \sqrt{\alpha}(\ln \alpha - 2) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha^{-\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} (-2\sqrt{\alpha}) = 0 \end{aligned}$$

ergibt. Folglich existiert das uneigentliche Integral 2. Art

$$\begin{aligned} \int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \\ &= 2\sqrt{e} \underbrace{(\ln e - 2)}_{=1} - 2 \cdot \underbrace{\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \sqrt{\alpha}(\ln \alpha - 2)}_{=0} = -2\sqrt{e}. \end{aligned}$$

Dagegen existiert das uneigentliche Integral 1. Art $\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ wegen

$$\begin{aligned} \int_e^b \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= [2\sqrt{x}(\ln x - 2)]_e^b = \\ &= 2 \underbrace{\sqrt{b}}_{\rightarrow \infty} \cdot \left(\underbrace{\ln b}_{\rightarrow \infty} - 2 \right) - 2\sqrt{e}(\ln e - 2) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} +\infty \end{aligned}$$

nicht.

b) Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= \\ &= \int \underbrace{e^x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)}_{u(x)} dx - \int \frac{e^x}{1+x^2} dx = \\ &= \underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)}_{u(x)} - \int \underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{1+x^2} \right)}_{u'(x)} dx - \int \frac{e^x}{1+x^2} dx = \\ &= e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) + \int \frac{e^x}{1+x^2} dx - \int \frac{e^x}{1+x^2} dx = \\ &= e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) + C \end{aligned}$$

Für alle $0 < b$ gilt damit

$$\begin{aligned} \int_0^b e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= \left[e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \right]_0^b = \\ &= e^b \left(\frac{\pi}{2} - \arctan b \right) - e^0 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 0 \right) = e^b \left(\frac{\pi}{2} - \arctan b \right) - \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

wobei sich mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} e^b \left(\frac{\pi}{2} - \arctan b \right) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan b}{e^{-b}} \stackrel{\text{L'H}}{\underset{\text{„}0/0\text{“}}{=}} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+b^2}}{-e^{-b}} = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^b}{1+b^2} \stackrel{\text{L'H}}{\underset{\text{„}\infty/\infty\text{“}}{=}} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^b}{2b} \stackrel{\text{L'H}}{\underset{\text{„}\infty/\infty\text{“}}{=}} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^b}{2} = \infty \end{aligned}$$

ergibt. Folglich existiert das uneigentliche Integral 1. Art

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \underbrace{e^b \left(\frac{\pi}{2} - \arctan b \right)}_{-\infty} - \frac{\pi}{2} = \infty \end{aligned}$$

und damit insbesondere auch $\int_{-\infty}^\infty e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$ nicht.

28. a) Die gegebene Funktion

$$f : [2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2} = x^{-2} \cdot \ln x,$$

ist (als Produkt einer Potenzfunktion und des natürlichen Logarithmus) stetig und (beliebig oft) differenzierbar, und für alle $x \in [2; \infty[$ gilt

$$f'(x) = (-2)x^{-3} \cdot \ln x + x^{-2} \cdot \frac{1}{x} = \underbrace{-x^{-3}}_{>0} \underbrace{\left(\underbrace{2 \ln x}_{\geq 2 \ln 2 > 1} - 1 \right)}_{>0} < 0;$$

damit ist die auf dem Intervall $[2; \infty[$ definierte Funktion f (sogar streng) monoton fallend. Da darüber hinaus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{\underset{\text{„}\infty/\infty\text{“}}{=}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

gilt, nimmt f nur positive Funktionswerte an.

b) Es ist

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \underbrace{x^{-2}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} dx = \underbrace{\frac{x^{-1}}{-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{-1}}{-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)} dx = \\ &= -x^{-1} \ln x + \int x^{-2} dx = -x^{-1} \ln x + \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{\ln x + 1}{x} + C; \end{aligned}$$

damit ist etwa

$$F : [2; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = -\frac{\ln x + 1}{x},$$

eine Stammfunktion von f .

c) Gemäß a) ist die gegebene Funktion $f : [2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und monoton fallend mit nur positiven Funktionswerten; nach dem Integralvergleichskriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche

Integral $\int_2^{\infty} f(x) dx$ konvergiert. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

ergibt sich

$$\int_2^b f(x) dx = [F(x)]_2^b = F(b) - F(2) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} -F(2) = \frac{\ln 2 + 1}{2};$$

damit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_2^{\infty} f(x) dx$ und folglich auch

die zu betrachtende Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.