

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

21. a) Zu betrachten ist die Integralfunktion

$$g : [2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(a) = \int_2^a \frac{x^2 - 2x - 1}{x - x^3} dx;$$

die gebrochenrationale Integrandenfunktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - x^3},$$

besitzt wegen

$$\begin{aligned} x - x^3 &= x(1 - x^2) = x(1 - x)(1 + x) = 0 \iff \\ &\iff (x = 0 \text{ oder } 1 - x = 0 \text{ oder } 1 + x = 0) \iff x \in \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

die maximale Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, so daß $D =]1, \infty[$ das maximale Definitionsintervall ist, in dem die untere Integrationsgrenze 2 liegt. Wir unterwerfen f der Partialbruchzerlegung und bestimmen Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1-x} + \frac{\gamma}{1+x} \quad \text{für alle } x \in]1, \infty[;$$

wegen

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1-x} + \frac{\gamma}{1+x} &= \frac{\alpha \cdot (1-x)(1+x) + \beta \cdot x(1+x) + \gamma \cdot x(1-x)}{x(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{\alpha \cdot (1-x^2) + \beta \cdot (x+x^2) + \gamma \cdot (x-x^2)}{x-x^3} \\ &= \frac{(-\alpha + \beta - \gamma)x^2 + (\beta + \gamma)x + \alpha}{x-x^3} \end{aligned}$$

für alle $x \in]1, \infty[$ ergibt sich über den Koeffizientenvergleich

$$-\alpha + \beta - \gamma = 1 \quad \text{und} \quad \beta + \gamma = -2 \quad \text{und} \quad \alpha = -1,$$

also $\beta - \gamma = 1 + \alpha = 0$ bzw. $\beta = \gamma$, und damit $\beta = \gamma = -1$. Wegen

$$f(x) = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{1-x} + \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

für alle $x \in]1, \infty[$ ergibt sich für $a \geq 2$ damit

$$\begin{aligned}
 g(a) &= \int_2^a \frac{x^2 - 2x - 1}{x - x^3} dx \\
 &= \int_2^a \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
 &= \left[-\ln|x| + \ln|x-1| - \ln|x+1| \right]_2^a \\
 &= \left(-\ln|a| + \ln|a-1| - \ln|a+1| \right) - \left(-\ln 2 + \ln 1 - \ln 3 \right) \\
 &\stackrel{a \geq 2}{=} -\ln a + \ln(a-1) - \ln(a+1) + \ln 6 = \ln \frac{6(a-1)}{a(a+1)}.
 \end{aligned}$$

- b) Die Integrandenfunktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist als gebrochen-rationale Funktion stetig, und damit ist ihre Integralfunktion $g : [2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar, und für alle $x \in [2, \infty[$ gilt

$$g'(x) = f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - x^3} = \frac{(x-1)^2 - 2}{x(1-x^2)}.$$

Für alle $x \in [2, \infty[$ gilt $2 \leq x$, also $x > 0$ und $1 - x^2 \leq 1 - 2^2 = -3 < 0$, und damit für den Nenner $x(1-x^2) < 0$; des weiteren ergibt sich:

- für alle $x \in [2, 1 + \sqrt{2}[$ gilt $2 \leq x < 1 + \sqrt{2}$, also $1 \leq x-1 < \sqrt{2}$ mit $(x-1)^2 < 2$, und damit für den Zähler $(x-1)^2 - 2 < 0$, insgesamt also

$$g'(x) = \frac{\overbrace{(x-1)^2 - 2}^{<0}}{\underbrace{x(1-x^2)}_{<0}} > 0,$$

so daß die stetige Funktion g auf dem Intervall $[2, 1 + \sqrt{2}]$ streng monoton wächst: es ist also $f(x) < f(1 + \sqrt{2})$ für alle $x \in [2, 1 + \sqrt{2}[$.

- für alle $x \in]1 + \sqrt{2}, \infty[$ gilt $x > 1 + \sqrt{2}$, also $x-1 > \sqrt{2}$ mit $(x-1)^2 > 2$, und damit für den Zähler $(x-1)^2 - 2 > 0$, insgesamt also

$$g'(x) = \frac{\overbrace{(x-1)^2 - 2}^{>0}}{\underbrace{x(1-x^2)}_{<0}} < 0,$$

so daß die stetige Funktion g auf dem Intervall $[1 + \sqrt{2}, \infty[$ streng monoton fällt: es ist also $f(x) < f(1 + \sqrt{2})$ für alle $x \in]1 + \sqrt{2}, \infty[$.

Damit besitzt $g : [2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ in $a = 1 + \sqrt{2}$ ein globales Maximum.

22. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^\pi (\sin x)^n dx = \int_0^\pi \underbrace{(\sin x)^{n-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'(x)} dx \\
 &= \left[\underbrace{(\sin x)^{n-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{(n-1)(\sin x)^{n-2} \cdot \cos x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} dx \\
 &= \left((\sin \pi)^{n-1} \cdot (-\cos \pi) - (\sin 0)^{n-1} \cdot (-\cos 0) \right) + \\
 &\quad + (n-1) \cdot \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} \cdot (\cos x)^2 dx \\
 &= \left(0^{n-1} \cdot 1 - 0^{n-1} \cdot (-1) \right) + (n-1) \cdot \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} \cdot (1 - (\sin x)^2) dx \\
 &= (n-1) \cdot \int_0^\pi ((\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n) dx \\
 &= (n-1) \cdot \left(\int_0^\pi (\sin x)^{n-2} dx - \int_0^\pi (\sin x)^n dx \right) \\
 &= (n-1) \cdot (I_{n-2} - I_n) = (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) \cdot I_n,
 \end{aligned}$$

woraus sich

$$n \cdot I_n = (n-1) \cdot I_{n-2} \quad \text{und damit} \quad I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$

ergibt.

23. a) Durch dreimalige partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \underbrace{x^3}_{u_1(x)} \underbrace{\cos x}_{v_1'(x)} dx &= \left[\underbrace{x^3}_{u_1(x)} \underbrace{\sin x}_{v_1(x)} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{3x^2}_{u_1'(x)} \underbrace{\sin x}_{v_1(x)} dx \\
 &= \left((2\pi)^3 \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - 0^3 \underbrace{\sin 0}_{=0} \right) + 3 \int_0^{2\pi} \underbrace{x^2}_{u_2(x)} \underbrace{(-\sin x)}_{v_2'(x)} dx \\
 &= 3 \left(\left[\underbrace{x^2}_{u_2(x)} \underbrace{\cos x}_{v_2(x)} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{2x}_{u_2'(x)} \underbrace{\cos x}_{v_2(x)} dx \right) \\
 &= 3 \left((2\pi)^2 \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - 0^2 \underbrace{\cos 0}_{=1} \right) - 6 \int_0^{2\pi} \underbrace{x}_{u_3(x)} \underbrace{\cos x}_{v_3'(x)} dx \\
 &= 12\pi^2 - 6 \left(\left[\underbrace{x}_{u_3(x)} \underbrace{\sin x}_{v_3(x)} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{1}_{u_3'(x)} \underbrace{\sin x}_{v_3(x)} dx \right) \\
 &= 12\pi^2 - 6 \left(2\pi \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - 0 \underbrace{\sin 0}_{=0} \right) - 6 \int_0^{2\pi} (-\sin x) dx \\
 &= 12\pi^2 - [\cos x]_0^{2\pi} = 12\pi^2 - \left(\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \underbrace{\cos 0}_{=1} \right) = 12\pi^2.
 \end{aligned}$$

b) Die gegebene Funktion

$$f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

ist als Quotient des Sinus und der Identität differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \cos x - \frac{1}{x^2} \cdot \sin x$$

für alle $x > 0$. Für alle $x \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ gilt dabei $\cos x \leq 0$ und $\sin x \geq 0$, also

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{>0} \cdot \underbrace{\cos x}_{\leq 0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\sin x}_{\geq 0} \leq 0,$$

und folglich ist die Funktion f auf dem Intervall $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ monoton fallend.

c) Für alle $x \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ gilt

$$\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi;$$

da f gemäß b) auf $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ monoton fallend ist, folgt daraus

$$f(\frac{1}{2}\pi) \geq f(x) \geq f(\frac{3}{4}\pi)$$

mit

$$f(\frac{1}{2}\pi) = \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi)}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi}$$

und

$$f(\frac{3}{4}\pi) = \frac{\sin(\frac{3}{4}\pi)}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi},$$

insgesamt also

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \leq f(x) \leq \frac{2}{\pi}.$$

Wegen der Monotonie des Integrals ergibt sich daraus

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} dx \leq \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} f(x) dx \leq \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2}{\pi} dx$$

mit

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

insgesamt also die zu zeigende Abschätzung

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \leq \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} f(x) dx \leq \frac{1}{2}.$$

24. Die beiden gegebenen Funktionen

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (\ln x)^2, \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln(x^2),$$

sind (als Kompositionen des natürlichen Logarithmus und einer quadratischen Funktion) stetig differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \ln x \quad \text{und} \quad g'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot (2x) = \frac{2}{x}.$$

- a) Für einen Schnittpunkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der Graphen G_f und G_g der beiden gegebenen Funktionen gilt

$$(\ln x)^2 = f(x) = y = g(x) = \ln(x^2) = 2 \ln x$$

mit

$$\begin{aligned} (\ln x)^2 = 2 \ln x &\iff (\ln x)^2 - 2 \ln x = 0 \iff \ln x \cdot (\ln x - 2) = 0 \\ &\iff (\ln x = 0 \text{ oder } \ln x = 2) \iff (x = 1 \text{ oder } x = e^2); \end{aligned}$$

damit besitzen G_f und G_g genau zwei Schnittpunkte, nämlich $(1, 0)$ und $(e^2, 4)$; deren x -Koordinaten sind also $a = 1$ und $b = e^2$ mit $a < b$.

- b) Für alle $x \in [a, b]$ gilt $1 \leq x \leq e^2$, woraus mit dem Monotonieverhalten des Logarithmus

$$0 = \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e^2 = 2,$$

also

$$\ln x \leq 2 \quad \text{und} \quad 0 \leq \ln x,$$

woraus mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$f(x) = (\ln x)^2 = \ln x \cdot \ln x \leq 2 \cdot \ln x = \ln(x^2) = g(x)$$

folgt. Damit ergibt sich für den Inhalt A der durch G_f und G_g zwischen a und b begrenzten Fläche

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b (g(x) - f(x)) dx = \int_a^b \underbrace{1}_{v'(x)} \cdot \underbrace{(g(x) - f(x))}_{u(x)} dx \\ &= \left[\underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{(g(x) - f(x))}_{u(x)} \right]_a^b - \int_a^b \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{(g'(x) - f'(x))}_{u'(x)} dx \\ &= \left[\underbrace{b \cdot (g(b) - f(b))}_{=0} - \underbrace{a \cdot (g(a) - f(a))}_{=0} \right] - \int_a^b x \cdot (g'(x) - f'(x)) dx \\ &= \int_a^b x (f'(x) - g'(x)) dx. \end{aligned}$$

c) Mit den bereits bestimmten Ableitungen f' und g' ergibt sich

$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b x \left(\frac{2}{x} \ln x - \frac{2}{x} \right) dx = \int_a^b \underbrace{2}_{v'(x)} \cdot \underbrace{(\ln x - 1)}_{u(x)} dx \\
 &= \left[\underbrace{2x}_{v(x)} \cdot \underbrace{(\ln x - 1)}_{u(x)} \right]_a^b - \int_a^b \underbrace{2x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} dx \\
 &= \left[2x \cdot (\ln x - 1) \right]_a^b - \int_a^b 2 dx \\
 &= \left[2x \cdot (\ln x - 1) \right]_a^b - \left[2x \right]_a^b = \left[2x \cdot (\ln x - 2) \right]_a^b = \\
 &= 2e^2 \cdot \underbrace{(\ln e^2 - 2)}_{=-2-2=0} - 2 \cdot \underbrace{(\ln 1 - 2)}_{=0} = -2 \cdot (-2) = 4.
 \end{aligned}$$