MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 5
12.06.2020

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

17. Gegeben ist die gebrochenrationale und damit insbesondere stetige Funktion

$$f :]-e, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x-e}{x+e},$$

und wegen

$$f(x) = \frac{x-e}{x+e} = \frac{(x+e)-2e}{x+e} = \frac{x+e}{x+e} + \frac{-2e}{x+e} = 1 - 2e \cdot \frac{1}{x+e}$$

für alle $x > -e$ ist etwa

$$F :]-e, \infty[\to \mathbb{R}, \quad F(x) = x - 2e \cdot \ln(x+e),$$

eine Stammfunktion von f. Die zu betrachtende Fläche, die vom Graphen G_f und der x–Achse zwischen den Geraden $x = 0$ und $x = 3e$ eingeschlossen wird, besitzt den Flächeninhalt

$$A = \int_0^{3e} |f(x)| \, dx,$$

wobei der Graph G_f wegen

$$f(x) = \frac{\overbrace{x-e}^{\leq 0}}{\underbrace{x+e}_{>0}} \leq 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in [0, e]$$

im Bereich $[0, e]$ auf und unterhalb der x–Achse sowie wegen

$$f(x) = \frac{\overbrace{x-e}^{\geq 0}}{\underbrace{x+e}_{>0}} \geq 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in [e, 3e]$$

im Bereich $[e, 3e]$ auf und oberhalb der x–Achse verläuft. Damit gilt

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{3e} |f(x)| \, dx = \int_0^e \underbrace{|f(x)|}_{=-f(x)} \, dx + \int_e^{3e} \underbrace{|f(x)|}_{=f(x)} \, dx = \\ &= -\int_0^e f(x) \, dx + \int_e^{3e} f(x) \, dx = -\big[F(x)\big]_0^e + \big[F(x)\big]_e^{3e} = \\ &= -\big(F(e) - F(0)\big) + \big(F(3e) - F(e)\big) = F(3e) - 2F(e) + F(0) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
F(3e) &= 3e - 2e \cdot \ln(3e + e) = 3e - 2e \cdot \ln(4e) \\
&= 3e - 2e \cdot (\ln 4 + \ln e) = 3e - 2e \cdot (2\ln 2 + 1) = e - 4e \ln 2 \\
F(e) &= e - 2e \cdot \ln(e + e) = e - 2e \cdot \ln(2e) \\
&= e - 2e \cdot (\ln 2 + \ln e) = e - 2e \cdot (\ln 2 + 1) = -e - 2e \ln 2 \\
F(0) &= 0 - 2e \cdot \ln(0 + e) = -2e \cdot \ln e = -2e \cdot 1 = -2e,
\end{aligned}$$

woraus sich insgesamt

$$\begin{aligned}
A = F(3e) - 2F(e) + F(0) &= \\
&= (e - 4e \ln 2) - 2 \cdot (-e - 2e \ln 2) + (-2e) = \\
&= e - 4e \ln 2 + 2e + 4e \ln 2 - 2e = e
\end{aligned}$$

ergibt.

18. a) Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = e^{b \ln a}$ für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$, so daß f zumindest in allen Punkten $x > 0$ als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist. Ferner ergibt sich im Exponenten wegen

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \text{mit} \quad \ln x \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{x} \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} +\infty$$

für $x \to 0+$ ein Grenzwert der Form „$\frac{\infty}{\infty}$". Wir betrachten die jeweils differenzierbaren (Zähler– und Nenner–)Funktionen

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln x, \qquad \text{und} \qquad h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x},$$

mit

$$g'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad h'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$; des weiteren gilt $\lim\limits_{x \to 0+} h(x) = \infty$. Da nun der Grenzwert

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} 0$$

existiert, existiert nach der Regel von de l'Hospital auch der Grenzwert von $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ für $x \to 0+$, und es gilt

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{g'(x)}{h'(x)} = 0.$$

Folglich erhalten wir (wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion exp an der Stelle 0) dann

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1,$$

so daß die gegebene Funktion

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^x, & \text{falls } x > 0, \\ c, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

genau dann auch an der Stelle 0 und damit als Funktion stetig ist, wenn

$$c = f(0) = \lim_{x \to 0+} f(x) = 1$$

gilt.

b) Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist die zur gemäß a) stetigen Funktion $f : [0; \infty[\to \mathbb{R}$ gebildete Integralfunktion

$$F : [0; \infty[\to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [0; \infty[$. Speziell an der Stelle 0 ergibt sich

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} F(x) \underset{F(0)=0}{=} \\ = \lim_{x \to 0+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0) = 1.$$

19. Die für einen Parameter $a > 0$ gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ist (als Verknüpfung und Differenz von Potenzfunktionen und einer konstanten Funktion) differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right) = -\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}},$$

also

$$(f'(x))^2 = \left(-\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - 1,$$

und damit

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - 1\right)} = \sqrt{a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ ergibt sich demnach

$$\int_\varepsilon^a \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_\varepsilon^a \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right) dx = \left[a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_\varepsilon^a = \\ = \left[\frac{3}{2} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}\right]_\varepsilon^a = \underbrace{\frac{3}{2} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}_{=\frac{3}{2}a} - \frac{3}{2} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}_{\to 0} \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} \frac{3}{2}\, a,$$

also

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^a \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx = \frac{3}{2}\, a.$$

20. Da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, existiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ das bestimmte Integral über das abgeschlossene Intervall $[x-1, x]$. Die Funktion g ist also für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, und mit der Integralfunktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

gilt

$$g(x) = \int_{x-1}^x f(t)\, dt = \int_0^x f(t)\, dt - \int_0^{x-1} f(t)\, dt = F(x) - F(x-1).$$

Ferner ist nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung F und damit auch g differenzierbar, und es gilt

$$g'(x) = F'(x) - F'(x-1) = f(x) - f(x-1)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da f streng monoton fällt, ist $f(x) < f(x-1)$ und somit $g'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das bedeutet, daß g ebenfalls streng monoton fallend ist.