MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 4
05.06.2020

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

13. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - 3\,x^2,$$

ist (als Summe der Exponentialfunktion und einer quadratischen Funktion) stetig und beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = e^x - 6\,x \qquad \text{und} \qquad f''(x) = e^x - 6 \qquad \text{und} \qquad f'''(x) = e^x.$$

a) Es ist

$$\begin{aligned} f(-1) = e^{-1} - 3 \cdot (-1)^2 &= \frac{1}{e} - 3 < 0, \\ f(0) = e^0 - 3 \cdot 0^2 &= 1 > 0, \\ f(1) = e^1 - 3 \cdot 1^2 &= e - 3 < 0, \\ f(4) = e^4 - 3 \cdot 4^2 &= e^4 - 48 > 0; \end{aligned}$$

damit existiert für die stetige Funktion f nach dem Nullstellensatz

- auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1, 0]$ wegen $f(-1) \cdot f(0) < 0$ ein $\xi_1 \in \,]-1, 0[$ mit $f(\xi_1) = 0$,
- auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ wegen $f(0) \cdot f(1) < 0$ ein $\xi_2 \in \,]0.1[$ mit $f(\xi_2) = 0$,
- auf dem abgeschlossenen Intervall $[1, 4]$ wegen $f(1) \cdot f(4) < 0$ ein $\xi_3 \in \,]1, 4[$ mit $f(\xi_3) = 0$.

Damit besitzt f mindestens die drei (paarweise verschiedenen) Nullstellen ξ_1, ξ_2 und ξ_3 mit $\xi_1 < 0 < \xi_2 < 1 < \xi_3$.

b) Wir führen die Annahme, die Funktion f besitze mehr als drei Nullstellen, zum Widerspruch; seien dazu $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}$ Nullstellen von f mit $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Nach dem Satz von Rolle existieren zwischen je zwei Nullstellen der differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindestens eine Nullstelle ihrer Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es gibt also Nullstellen $x_1',\ x_2',\ x_3' \in \mathbb{R}$ von f' mit $x_1 < x_1' < x_2 < x_2' < x_3 < x_3' < x_4$, insbesondere also mit $x_1' < x_2' < x_3'$.

Da f beliebig oft differenzierbar ist, ist f' differenzierbar, und nach dem Satz von Rolle (für $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) existieren Nullstellen $x_1'', x_2'' \in \mathbb{R}$ von $(f')' = f''$ mit $x_1' < x_1'' < x_2' < x_2'' < x_3'$, insbesondere mit $x_1'' < x_2''$.
Schließlich ist auch f'' differenzierbar mit $(f'')' = f'''$, und der Satz von Rolle (für $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) sichert die Existenz von $\xi \in]x_1'', x_2''[$ mit $f'''(\xi) = 0$; dies steht aber im Widerspruch zu $f'''(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Folglich ist die Annahme, die Funktion f besitze mehr als drei Nullstellen, falsch; damit hat f aber höchstens drei Nullstellen.

14. In Abhängigkeit von den reellen Parametern a, $b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \begin{cases} \sin(x-a), & \text{für } x \geq 0, \\ \dfrac{e^{bx}-1}{x} - b, & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

gegeben; im folgenden wird mehrfach von der Stetigkeit $(*)$ des Sinus und Cosinus sowie der Exponentialfunktion Gebrauch gemacht.

a) Es ist zum einen

$$\lim_{x\to 0+} f_{a,b}(x) \underset{x>0}{=} \lim_{x\to 0+} \sin(x-a) \underset{(*)}{=} \sin(0-a) = f_{a,b}(0)$$

und zum anderen

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\overbrace{e^{bx}}^{\overset{(*)}{\to} e^0=1} -1}{x} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0-} \frac{e^{bx}\cdot b}{1} \underset{(*)}{=} e^0 \cdot b = b,$$

also

$$\lim_{x\to 0-} f_{a,b}(x) \underset{x<0}{=} \lim_{x\to 0-} \left(\frac{e^{bx}-1}{x} - b \right) = b - b = 0.$$

Damit ist $f_{a,b}$ genau dann in 0 stetig, wenn

$$\lim_{x\to 0-} f_{a,b}(x) = f_{a,b}(0) \qquad \text{bzw.} \qquad 0 = \sin(0-a) = -\sin a,$$

gilt, also genau für alle Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a \in \mathbb{Z}\cdot\pi$ und $b \in \mathbb{R}$ beliebig.

b) Da aus der Differenzierbarkeit von $f_{a,b}$ in 0 die Stetigkeit von $f_{a,b}$ in 0 folgt, können wir uns gemäß a) auf die Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a = k\,\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ beschränken; damit ist $f_{a,b}(0) = 0$. Dann gilt zum einen

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f_{a,b}(x) - f_{a,b}(0)}{x-0} \underset{x>0}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\overbrace{\sin(x-a)}^{\overset{(*)}{\to}\sin(-a)=0}}{x} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x-a)}{1} \underset{(*)}{=} \cos(0-a) = \cos a = \cos(k\,\pi) = (-1)^k$$

und zum anderen

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f_{a,b}(x) - f_{a,b}(0)}{x-0} \underset{x<0}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{e^{bx}-1}{x} - b}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{bx} - 1 - bx}{x^2} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{bx}\cdot b - b}{2\,x} = \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{e^{bx}-1}{x}}_{\to b \text{ gemäß a)}} \cdot \frac{b}{2} = b \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{2}.$$

Damit ist $f_{a,b}$ genau dann in 0 differenzierbar, wenn

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f_{a,b}(x) - f_{a,b}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{f_{a,b}(x) - f_{a,b}(0)}{x-0} \qquad \text{bzw.} \quad (-1)^k = \frac{b^2}{2},$$

gilt; wegen $\frac{b^2}{2} \geq 0$ ist $k = 2\ell$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$ gerade, und wegen $\frac{b^2}{2} = (-1)^{2\ell} = 1$ ist $b^2 = 2$, also $b = \pm\sqrt{2}$, so daß $f_{a,b}$ genau für alle Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a \in \mathbb{Z}\cdot 2\pi$ und $b = \pm\sqrt{2}$ in 0 differenzierbar ist.

15. Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |x|^x, & \text{für } x \neq 0, \\ 1, & \text{für } x = 0; \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = e^{b \ln a}$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ also

$$f(x) = |x|^x = e^{x \ln |x|}.$$

a) Zunächst ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ als Komposition und Produkt der Exponentialfunktion, des Logarithmus und linearer Funktionen differenzierbar, insbesondere also stetig, und für alle $x \neq 0$ gilt

$$f'(x) = e^{x \ln |x|} \cdot \left(1 \cdot \ln |x| + x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{x \ln |x|} \cdot (\ln |x| + 1)\,.$$

Wegen

$$\lim_{x\to 0} x \ln |x| = \lim_{x\to 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

ergibt sich wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion (an der Stelle 0)

$$f(x) = e^{x \ln |x|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1 = f(0),$$

so daß f auch an der Stelle 0 stetig ist; damit ist f eine stetige Funktion. Für alle $x \neq 0$ gilt ferner

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{e^{x \ln |x|}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(\ln |x| + 1)}_{\to -\infty} \right) = -\infty,$$

so daß f an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x| < \frac{1}{e}$ gilt $\ln|x| < -1$ und damit

$$f'(x) = \underbrace{e^{x \ln|x|}}_{>0} \cdot \underbrace{(\ln|x| + 1)}_{<0} < 0;$$

damit ist die stetige Funktion sowohl auf $\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ als auch auf $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ und folglich auf dem Intervall $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ streng monoton fallend.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > \frac{1}{e}$ gilt $\ln|x| > -1$ und damit

$$f'(x) = \underbrace{e^{x \ln|x|}}_{>0} \cdot \underbrace{(\ln|x| + 1)}_{>0} > 0;$$

damit ist die stetige Funktion sowohl auf $\left]-\infty, -\frac{1}{e}\right]$ als auch auf $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ streng monoton wachsend.

c) Wegen $f(0) = 1 > 0$ und $f(x) = e^{x \ln|x|} > 0$ für alle $x \neq 0$ gilt zunächst $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^+$; für „$\supseteq$“ sei $y \in \mathbb{R}^+$. Wegen

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \exp\big(\underbrace{\underbrace{x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\ln|x|}_{\to +\infty}}_{\to -\infty}\big) = 0$$

gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) < y$, und wegen

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \exp\big(\underbrace{\underbrace{x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\ln|x|}_{\to +\infty}}_{\to +\infty}\big) = +\infty$$

gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) > y$; damit existiert für die gemäß a) stetige Funktion f gemäß dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = y$, es ist also $y \in f(\mathbb{R})$.

16. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x - x,$$

ist (als Differenz des Sinus und der Identität) stetig und differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \cos x - 1$$

mit

$$f'(x) = 0 \iff \cos x - 1 = 0 \iff \cos x = 1 \iff x \in 2\pi \cdot \mathbb{Z};$$

damit besitzt f' unendlich viele Nullstellen, nämlich $x_k = 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

b) Wegen

$$f'(x) = \underbrace{\cos x}_{\leq 1} - 1 \leq 1 - 1 = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

ist die Funktion f zunächst monoton fallend. Zum Nachweis der strengen Monotonie seien $x', x'' \in \mathbb{R}$ mit $x' < x''$; ferner sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $x_k \leq x' < x_{k+1}$. Da x_k und x_{k+1} zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von f' sind, gilt

$$f'(x) = \underbrace{\cos x}_{<1} - 1 < 1 - 1 = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \,]x_k,\, x_{k+1}[\,,$$

so daß die stetige Funktion f auf $[x_k,\, x_{k+1}]$ sogar streng monoton fallend ist; wir treffen nun bezüglich der Lage von x'' die folgende Fallunterscheidung:

- Ist $x'' \leq x_{k+1}$, so folgt aus $x_k \leq x' < x'' \leq x_{k+1}$ wegen der strengen Monotonie von f auf $[x_k,\, x_{k+1}]$ direkt $f(x') > f(x'')$.
- Ist $x_{k+1} < x''$, so ergibt sich aufgrund der Monotonie von f zum einen $f(x_{k+1}) \geq f(x'')$; aus $x_k \leq x' < x_{k+1}$ folgt wegen der strengen Monotonie von f auf $[x_k,\, x_{k+1}]$ zum anderen $f(x') > f(x_{k+1})$, insgesamt also $f(x') > f(x'')$.

Damit ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend.

c) Wegen

$$f(0) = \sin 0 - 0 = 0 - 0 = 0$$

besitzt f die Nullstelle 0; da f gemäß b) streng monoton fallend ist, gilt $f(x) > 0$ für alle $x < 0$ und $f(x) < 0$ für alle $x > 0$, so daß f keine weitere Nullstelle besitzen kann. Es ist $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ein abgeschlossenes Intervall der Länge π, das die eindeutig bestimmte Nullstelle 0 enthält.