MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 3
29.05.2020

# Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

9. a) Mit der Stetigkeit des Cosinus (an der Stelle 0) und des natürlichen Logarithmus (an der Stelle 1) gilt

$$\ln(\underbrace{\cos t}_{\to \cos 0 = 1}) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \ln 1 = 0 \qquad \text{sowie} \qquad t^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

und mit der Regel von de l'Hospital ergibt sich damit

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t)}{t^2} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{-\sin t}{\cos t}}{2t} = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t\cos t} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{\cos t - t\sin t} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-0\cdot 0} = -\frac{1}{2};$$

dabei geht die Stetigkeit von Sinus und Cosinus (an der Stelle 0) ein.

b) Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz

$$a^b = \exp(b\ln a) \qquad \text{für alle} \quad a\in\mathbb{R}^+ \ \text{ und } \ b\in\mathbb{R}$$

ergibt sich

$$\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left(n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

mit

$$n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \qquad \text{für alle} \ \ n\in\mathbb{N}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ erhält man mit Hilfe von a) insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t)}{t^2} = -\frac{1}{2},$$

woraus mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion (an der Stelle $-\frac{1}{2}$) dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

folgt.

10. Die gegebene Funktion

$$f : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot (2x - 1 + \ln x),$$

ist als Summe und Produkt linearer Funktionen und des Logarithmus beliebig oft stetig differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot (2x - 1 + \ln x) + x \cdot \left(2 + \frac{1}{x}\right) \\ &= (2x - 1 + \ln x) + (2x + 1) = 4x + \ln x \end{aligned}$$

und

$$f''(x) = 4 + \frac{1}{x}.$$

a) Gemäß obiger Überlegung ist $f$ insbesondere zweimal differenzierbar; damit ist ihre Ableitung $g = f' : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und wegen

$$g'(x) = f''(x) = 4 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{>0} > 4 > 0$$

für alle $x > 0$ ist $g$ auf dem Intervall $]0, \infty[$ streng monoton wachsend.

b) Gemäß a) ist die Funktion $g = f' : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so daß sie auf $]0, \infty[$ höchstens eine Nullstelle besitzt. Zum Nachweis ihrer Existenz betrachten wir den Funktionswert

$$g(1) = f'(1) = 4 \cdot 1 + \ln 1 = 4 + 0 = 4 > 0,$$

und wegen

$$g(x) = f'(x) = \underbrace{4x}_{\to 0+} + \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} \xrightarrow[x \to 0+]{} -\infty$$

gibt es eine Stelle $a \in ]0, 1[$ mit $g(a) < 0$, so daß die stetige Funktion $g$ auf dem Intervall $]a, 1[ \subseteq ]0, \infty[$ nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi$ besitzt. Damit hat $g$ mit $\xi$ genau eine Nullstelle in $]0, \infty[$.

c) Die Funktion $g = f' : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$ ist gemäß a) streng monoton wachsend und besitzt gemäß b) genau eine Nullstelle $\xi$. Damit gilt:

- Für alle $x \in ]0, \xi[$ gilt $f'(x) < f'(\xi) = 0$, so daß die stetige Funktion $f$ auf dem Intervall $]0, \xi]$ streng monoton fallend ist.
- Für alle $x \in ]\xi, \infty[$ ist $f'(x) > f'(\xi) = 0$, so daß die stetige Funktion $f$ auf dem Intervall $[\xi, \infty[$ streng monoton wachsend ist.

Damit besitzt $f$ auf $]0, \infty[$ genau ein lokales Extremum, nämlich in $\xi$ ein (isoliertes) lokales Minimum.

11. a) Die gegebene Funktion

$$h : ]0; \infty[ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1},$$

ist (als Summe und Komposition des natürlichen Logarithmus und gebrochenrationaler Funktionen) stetig und (beliebig oft) differenzierbar, und für alle $x \in ]0;\infty[$ gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} - \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0; \end{aligned}$$

damit ist $h$ streng monoton fallend. Ferner gilt (wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion an der Stelle 1)

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \left( \underbrace{\ln \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 1+0=1}}_{\to \ln 1 = 0} - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to 0} \right) = 0,$$

so daß sich insgesamt $h(x) > 0$ für alle $]0;\infty[$ ergibt.

b) Für die gegebene Funktion

$$f : ]0;\infty[ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

ergibt sich gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = e^{b \ln a}$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ dann

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

und folglich unter Verwendung von Ketten– und Produktregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(1 \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \\ &= e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \underbrace{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)}_{=h(x)} = \underbrace{e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}_{>0} \cdot \underbrace{h(x)}_{\substack{>0 \\ \text{a)}}} > 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in ]0;\infty[$; folglich ist die Funktion $f$ streng monoton steigend. Unter Verwendung der Regel von de l'Hospital ergibt sich ferner

$$\lim_{x\to 0+} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0$$

sowie

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

woraus mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

sowie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$$

folgt; damit erhält man (unter Verwendung der strengen Monotonie von $f$) zunächst $W_f \subseteq \,]1; e[$. Zum Nachweis von „$\supseteq$" sei $y \in \,]1; e[$;

- wegen $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$ gibt es ein $0 < a < 1$ mit $f(a) < y$, und
- wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e$ gibt es ein $b > 1$ mit $y < f(b)$,

so daß für die (als Verknüpfung stetiger Funktionen selbst) stetige Funktion $f$ nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in \,]a; b[$ mit $f(\xi) = y$ existiert. Damit ist $y = f(\xi) \in W_f$ und $W_f = \,]1; e[$.

12. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x + \frac{1}{1+x^2}.$$

ist (als Summe des Arcus tangens und einer gebrochenrationalen Funktion) stetig und (beliebig oft) differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}.$$

Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \neq 1$ ist die stetige Funktion $f$ damit auf $]-\infty; 1]$ und $[1; \infty[$ jeweils streng monoton wachsend; folglich ist $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und damit insbesondere umkehrbar. Folglich gilt

$$f(x_0) < \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left( \underbrace{\arctan x}_{\to\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\to 0} \right) = \frac{\pi}{2}$$

und

$$f(x_0) > \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left( \underbrace{\arctan x}_{\to-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\to 0} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und damit zunächst $W_f \subseteq \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Zum Nachweis von „$\supseteq$" sei $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$;

- wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) < y$, und
- wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ gibt es ein $b > 0$ mit $y < f(b)$, und

so daß es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = y$ gibt, woraus $y \in W_f$ folgt. Insgesamt ergibt sich also $W_f = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Da $f$ eine streng monoton wachsende und auf einem Intervall, nämlich $\mathbb{R}$, definierte Funktion ist, ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ auf jeden Fall stetig. Da $f$ differenzierbar ist mit $f'(b) \neq 0$ für alle $b \neq 1$, ist $f^{-1}$ in allen Punkten $a = f(b) \neq f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ differenzierbar; die Annahme, $f^{-1}$ sei auch in $a = f(1)$ differenzierbar, führt in

$$1 = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}})'(1) = \left(f^{-1} \circ f\right)'(1) = \left(f^{-1}\right)'(f(1)) \cdot f'(1) = 0$$

zum Widerspruch.