MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 2
22.05.2020

# Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

5. a) Die Funktion $f$ ist als Differenz stetiger und differenzierbarer Funktionen selbst stetig und differenzierbar, und es gilt $f'(x) = 2\,e^x - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Für das Verhalten von $f$ am Rande von $D_f = \mathbb{R}^+$ ergibt sich zunächst

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (2\,e^x - x) = 2\cdot e^0 - 0 = 2;$$

wegen $e^x \geq x + 1$ für alle $x > 0$ gilt ferner

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (2\,e^x - x) = \lim_{x\to\infty} \Bigg(\underbrace{e^x}_{\to\infty} + \underbrace{(e^x - x)}_{\geq 1}\Bigg) = +\infty.$$

Wir zeigen nun die Behauptung $W_f = \,]2, +\infty[$ durch den Nachweis der beiden Inklusionen:

- Wegen $f'(x) = 2\,e^x - 1 > 2\,e^0 - 1 = 2 - 1 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ ist $f$ auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend, so daß $2 < f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und damit $W_f \subseteq \,]2, +\infty[$ gilt.
- Für alle $y \in \,]2, +\infty[$ gibt es
  - wegen $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 2$ ein $0 < a < 1$ mit $f(a) < y$ und
  - wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ein $b > 1$ mit $y < f(b)$;

  nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $\xi \in \,]a; b[$ mit $f(\xi) = y$; damit gilt $]2, \infty[\, \subseteq W_f$.

b) Die Funktion $f$ ist auf einem Intervall, nämlich $\mathbb{R}^+ = \,]0, +\infty[$, definiert sowie gemäß a) streng monoton wachsend und besitzt daher eine zunächst stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$. Da $f$ ferner in allen Punkten des Definitionsintervalls $D_f = \mathbb{R}^+$ differenzierbar ist mit $f'(x) > 1$ und damit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$, ist die Umkehrfunktion $f^{-1}$ sogar differenzierbar.

c) Seien $a, b \in W_f$ mit $a \neq b$; man kann $a < b$ annehmen. Die Einschränkung $f^{-1}|_{[a,b]}$ der differenzierbaren Funktion $f^{-1}$ auf das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ erfüllt insbesondere die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[a, b]$ und Differenzierbarkeit auf $]a, b[$, und wir erhalten ein $\xi \in \,]a, b[$ mit

$$f^{-1}(b) - f^{-1}(a) = \left(f^{-1}\right)'(\xi) \cdot (b - a);$$

dabei gilt nach der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen

$$\left(f^{-1}\right)'(\xi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\xi))}.$$

Wegen $f'(z) > 1$ für alle $z \in D_f$ ist insbesondere $f'(f^{-1}(\xi)) > 1$, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\left|f^{-1}(b) - f^{-1}(a)\right| = \left|\left(f^{-1}\right)'(\xi)\right| \cdot |b-a| = \\ = \left|\frac{1}{f'(f^{-1}(\xi))}\right| \cdot |b-a| < |b-a|\,.\end{aligned}$$

6. Die Einschränkung $f|_{[0,\frac{1}{e}[}$ von $f$ auf das Intervall $\left[0, \frac{1}{e}\right[$ ist als lineare Funktion stetig, und die Einschränkung $f|_{[\frac{1}{e},e^2]}$ von $f$ auf das Intervall $\left[\frac{1}{e}, e^2\right]$ ist als Produkt stetiger Funktionen ebenfalls stetig; damit ist die Funktion $f$ zunächst in allen Punkten $a \neq \frac{1}{e}$ stetig. Wegen

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{e}-}\left(-e^2\,x\right) = -e^2 \cdot \frac{1}{e} = -e = f(\frac{1}{e}) = \lim_{x\to\frac{1}{e}+} f(x)$$

ist $f$ auch im Punkte $a = \frac{1}{e}$ stetig; damit ist $f$ eine stetige Funktion. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt $f$ demnach ein globales Minimum $p$ und ein globales Maximum $q$, und für den Wertebereich gilt $W_f = [f(p), f(q)]$.

Mit einer analogen Begründung wie oben ist $f$ in allen Punkten $a \neq \frac{1}{e}$ auch differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} -e^2, & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{e}, \\ \frac{1-\ln x}{x^2}, & \text{für } \frac{1}{e} < x \leq e^2; \end{cases}$$

wegen

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}-} \frac{f(x) - f(\frac{1}{e})}{x - \frac{1}{e}} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to\frac{1}{e}-} \frac{f'(x)}{1} = -e^2$$

und

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}+} \frac{f(x) - f(\frac{1}{e})}{x - \frac{1}{e}} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to\frac{1}{e}+} \frac{f'(x)}{1} = \frac{1-\ln\frac{1}{e}}{\left(\frac{1}{e}\right)^2} = 2\,e^2$$

ist $f$ im Punkt $a = \frac{1}{e}$ nicht differenzierbar. Für ein lokales Extremum von $f$ gibt es nun die folgenden drei Möglichkeiten:

- $a$ ist ein Randpunkt von $D_f = [0, e^2]$, also $a \in \{0, e^2\}$.
- $a$ ist eine Nichtdifferenzierbarkeitsstelle von $f$, also $a = \frac{1}{e}$.
- $a$ ist im Innern von $D_f$, und $f$ ist in $a$ differenzierbar; dann gilt $f'(a) = 0$. Wegen $f'(x) = 0 \iff 1 = \ln x \iff x = e$ ist also $a = e$.

Mit Hilfe der Wertetabelle

| $a$ | $0$ | $\frac{1}{e}$ | $e$ | $e^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(a)$ | $0$ | $-e$ | $\frac{1}{e}$ | $\frac{2}{e^2}$ |

mit $-e < 0 < \frac{2}{e^2} < \frac{1}{e}$ ergibt sich $p = \frac{1}{e}$ und $q = e$; man erhält also $W_f = \left[-e, \frac{1}{e}\right]$.

7. Die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin \frac{x^3 + x}{2},$$
ist als Verknüpfung des Sinus und einer Polynomfunktion stetig und differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt mit der Kettenregel
$$f'(x) = \left(\cos \frac{x^3 + x}{2}\right) \cdot \frac{3\,x^2 + 1}{2}.$$
Seien nun $x$, $y \in [-1, 1]$; da für $x = y$ die zu zeigende Ungleichung trivial ist, können wir $x \neq y$ und damit sogar $x > y$ annehmen. Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion $f$ auf dem Intervall $[y, x]$ an und erhalten ein $\xi \in \,]y, x[$ mit
$$f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y).$$
Wegen $\xi \in \,]y, x[\, \subseteq [-1, 1]$ ist $-1 \leq \xi \leq 1$, also $-1 \leq \xi^3 \leq 1$, und damit $-2 \leq \xi^3 + \xi \leq 2$, also $-1 \leq \frac{\xi^3+\xi}{2} \leq 1$; aufgrund des Monotonieverhaltens des Cosinus erhält man also $\cos \frac{\xi^3+\xi}{2} \geq \cos 1$. Ferner ist $\xi^2 \geq 0$ und damit $\frac{3\,\xi^2+1}{2} \geq \frac{1}{2}$, woraus sich
$$f'(\xi) = \underbrace{\cos \frac{\xi^3 + \xi}{2}}_{\geq \cos 1} \cdot \underbrace{\frac{3\,\xi^2 + 1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} \geq \frac{\cos 1}{2} > 0$$
ergibt. Zusammenfassend erhält man
$$\left|\sin \frac{x^3 + x}{2} - \sin \frac{y^3 + y}{2}\right| = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \geq \frac{\cos 1}{2} \cdot |x - y|.$$

8. Da die beiden Funktionen $f$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar sind, ist auch ihre Differenz
$$h : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) - f(x),$$
stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar, und wegen $f(a) < g(a)$ sowie $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in \,]a, b[$ gilt
$$h(a) = g(a) - f(a) > 0$$
sowie
$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0$$
für alle $x \in \,]a, b[$. Da $f(a) < g(a)$ bereits nach Voraussetzung gilt, sei $x \in \,]a, b]$; wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion $h$ auf dem Intervall $[a, x]$ an und erhalten ein $\xi \in \,]a, x[$ mit
$$h(x) - h(a) = \underbrace{h'(\xi)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x - a)}_{> 0} \geq 0, \qquad \text{also} \qquad h(x) \geq h(a) > 0$$
und damit $f(x) < g(x)$.