

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Für $x > 1$ ist $\ln x > 0$, mit der Definition der allgemeinen Potenz also

$$f :]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (\ln x)^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln(\ln x)} = e^{g(x)}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir $f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$, und für g' ergibt sich mit Hilfe der Produktregel und der Kettenregel für den zweiten Faktor

$$g'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x) + \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (\ln(\ln x) + 1),$$

insgesamt also

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{\ln x \cdot \ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{x} (\ln(\ln x) + 1) = \\ &= (\ln x)^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} (\ln(\ln x) + 1) = f(x) \cdot \frac{1}{x} (\ln(\ln x) + 1) \end{aligned}$$

für alle $x \in]1, \infty[$.

- b) Mit wiederholter Anwendung der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}} \cdot \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}} \cdot \frac{2x \cdot \sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \frac{x \cdot (2\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

- c) Über die Potenzgesetze erhalten wir

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2 \cdot (e^{\sin x})^{\cos x} = x^2 \cdot e^{\sin x \cdot \cos x},$$

so daß sich mit der Produktregel und der Kettenregel für den zweiten Faktor

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x \cdot e^{\sin x \cdot \cos x} + x^2 \cdot e^{\sin x \cdot \cos x} \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= e^{\sin x \cdot \cos x} \cdot (2x + x^2 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt.

- d) Für $x > \frac{1}{e}$ ist $\ln x > \ln \frac{1}{e} = -1$ und damit $\ln x + 1 > 0$, mit der Definition der allgemeinen Potenz also

$$k :]\frac{1}{e}, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad k(x) = (\ln x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x + 1)} = e^{g(x)}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir $k'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$, und für g' ergibt sich mit Hilfe der Produktregel und der Kettenregel für den zweiten Faktor

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(\ln x + 1) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x + 1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\ln x + 1} - \ln(\ln x + 1) \right),$$

insgesamt also

$$\begin{aligned} k'(x) &= e^{g(x)} \cdot g'(x) \\ &= e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x + 1)} \cdot \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\ln x + 1} - \ln(\ln x + 1) \right) \\ &= (\ln x + 1)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\ln x + 1} - \ln(\ln x + 1) \right) \\ &= k(x) \cdot \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\ln x + 1} - \ln(\ln x + 1) \right) \end{aligned}$$

für alle $x \in]\frac{1}{e}, \infty[$.

2. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x < 0, \\ e^x - 1, & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

ist zunächst für alle $x \neq 0$ als Summe, Produkt und Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar; dabei gilt

$$f'(x) = 1 + \left(2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) = 1 + 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

für alle $x < 0$ sowie $f'(x) = e^x$ für alle $x > 0$.

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit von f an der Stelle 0 betrachten wir das Grenzverhalten des Differenzenquotienten: für den rechtsseitigen Grenzwert gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

gemäß Satz 5.4 (3) bzw. als Differentialquotient der Exponentialfunktion an der Stelle 0; für den linksseitigen Grenzwert gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 1 \right| &= \left| \frac{x + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} - 1 \right| = \left| \left(1 + x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) - 1 \right| = \\ &= \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \underbrace{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}_{\leq 1} \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

woraus sich unter Verwendung des Schrankenlemmas

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 1 \right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

ergibt. Insgesamt ist f differenzierbar mit

$$f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x < 0, \\ 1, & \text{für } x = 0, \\ e^x, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Zum Nachweis, daß die Ableitung f' im Punkt $x = 0$ unstetig ist, betrachten wir die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D_f mit

$$a_n = -\frac{1}{2n\pi} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N};$$

damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, aber

$$f'(a_n) = 1 + \frac{2}{-2n\pi} \cdot \underbrace{\sin(-2n\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos(-2n\pi)}_{=1} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \neq 1 = f'(0).$$

Damit ist f' unstetig im Punkt $x = 0$, insbesondere also f nicht stetig differenzierbar.

3. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\ln|x|), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist zunächst in allen Punkten $x \neq 0$ als Produkt einer quadratischen Funktion und der Verkettung des Sinus und des Logarithmus differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \sin(\ln|x|) + x^2 \cdot \left(\cos(\ln|x|) \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= 2x \sin(\ln|x|) + x \cos(\ln|x|); \end{aligned}$$

für $x = 0$ und $h \neq 0$ ergibt sich ferner

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin(\ln|h|) - 0}{h} = h \sin(\ln|h|)$$

mit

$$|h \sin(\ln|h|)| = |h| \cdot \underbrace{|\sin(\ln|h|)|}_{\leq 1} \leq |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

so daß f auch im Punkt $x = 0$ wegen

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin(\ln|h|) = 0$$

differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\ln|x|) + x \cos(\ln|x|), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist zunächst in allen Punkten $x \neq 0$ als Summe von Produkten linearer Funktionen und den Verkettungen des Sinus bzw. Cosinus mit dem Logarithmus stetig; wegen

$$\begin{aligned} |f'(x) - f'(0)| &\stackrel{f'(0)=0}{=} |(2x \sin(\ln|x|) + x \cos(\ln|x|))| \leq \\ &\leq 2|x| \cdot \underbrace{|\sin(\ln|x|)|}_{\leq 1} + |x| \cdot \underbrace{|\cos(\ln|x|)|}_{\leq 1} \leq 3|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0),$$

so daß f' auch im Punkt 0 stetig ist. Folglich ist f' stetig und damit f stetig differenzierbar.

b) Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x^2 \sin(\ln x) = 0 \\ &\iff \sin(\ln x) = 0 \\ &\iff \ln x = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = e^{k\pi} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

wegen $e^{k_1\pi} \neq e^{k_2\pi}$ für alle $k_1 \neq k_2$ besitzt damit f unendlich viele positive Nullstellen, nämlich $e^{k\pi}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dabei gilt

$$e^{k\pi} \in]0, 1[\iff e^{k\pi} < 1 \iff k\pi < \ln 1 \stackrel{\ln 1=0}{\iff} k < 0$$

sowie

$$e^{k\pi} \in]1, \infty[\iff e^{k\pi} > 1 \iff k\pi > \ln 1 \stackrel{\ln 1=0}{\iff} k > 0,$$

so daß in $]0, 1[$ und $]1, \infty[$ jeweils unendliche viele Nullstellen von f liegen.

4. a) \sinh und \cosh sind als Differenz bzw. Summe differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh' x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}(-1)) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

sowie

$$\cosh' x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}(-1)) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sinh x.$$

- b) Arsinh ist als Summe und Verknüpfung differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar, und die zweimalige Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsinh}' x &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (2x) \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Alternativ läßt sich mit Hilfe der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen wie folgt argumentieren: \sinh ist eine stetige und streng monoton wachsende Funktion, die in allen Punkten ihres Definitionsintervalls \mathbb{R} differenzierbar ist mit $\sinh' x = \cosh x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist die Umkehrfunktion Arsinh differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsinh}' x &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh} x)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(\operatorname{Arsinh} x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}; \end{aligned}$$

dabei geht die Beziehung $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, also $\cosh y = \sqrt{\sinh^2 y + 1}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ein.

- c) Arcosh ist auf dem Intervall $]1, \infty[$ als Summe und Verknüpfung differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar; dabei kommt die Nichtdifferenzierbarkeitsstelle $a = 0$ der Wurzelfunktion wegen $x^2 - 1 > 0$ für alle $x > 1$ nicht zum Tragen. Die zweimalige Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcosh}' x &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (2x) \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

für alle $x \in]1, \infty[$. Alternativ läßt sich mit Hilfe der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen wie folgt argumentieren: $\cosh|_{\mathbb{R}_0^+}$ ist eine stetige und streng monoton wachsende Funktion, die in allen Punkten ihres Definitionsintervalls \mathbb{R}_0^+ differenzierbar ist mit $\cosh' x = \sinh x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$; damit ist die Umkehrfunktion Arcosh auf $]1, \infty[$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcosh}' x &= \frac{1}{\cosh'(\operatorname{Arcosh} x)} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{Arcosh} x)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{Arcosh} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}; \end{aligned}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^+$ ergibt sich nämlich aus der Beziehung $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ zunächst $\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$ und unter Berücksichtigung von $\sinh y > 0$ schließlich $\sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1}$.