MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Repetitorium
31.07.2020

Repetitorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf der Definitionsmenge $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

   - Die Funktion f heißt stetig im Punkt $a \in D$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ stets $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ gilt.
   - Die Funktion f heißt differenzierbar im Punkt $a \in D$, wenn der Differentialquotient
   $$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$
   im eigentlichen Sinne existiert.
   - Die Funktion f heißt stetig differenzierbar, wenn f selbst differenzierbar und ihre Ableitung f' stetig ist.

   b) Die gegebene Funktion
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - x}{x^2}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$
   ist zunächst in allen Punkten $x \neq 0$ als Quotient und Summe von Polynomfunktionen und der Sinusfunktion differenzierbar mit
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x - 1) \cdot x^2 - (\sin x - x) \cdot 2\,x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{(\cos x - 1) \cdot x - 2\,(\sin x - x)}{x^3}; \end{aligned}$$
   wegen
   $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x - x}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3\,x^2} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6\,x} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$
   ist f auch im Punkt $a = 0$ differenzierbar mit
   $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{6}.$$

Damit ist die Funktion f differenzierbar. Die Ableitungsfunktion

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(\cos x - 1) \cdot x - 2\,(\sin x - x)}{x^3}, & \text{für } x \neq 0, \\ -\dfrac{1}{6}, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist zunächst in allen Punkten $x \neq 0$ als Quotient und Summe von Polynomfunktionen sowie der Cosinus– und der Sinusfunktion stetig; wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1) \cdot x - 2\,(\sin x - x)}{x^3} = \\
&\underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{((-\sin x) \cdot x + (\cos x - 1) \cdot 1) - 2\,(\cos x - 1)}{3\,x^2} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(-\sin x) \cdot x - (\cos x - 1)}{3\,x^2} = \\
&\underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{((-\cos x) \cdot x + (-\sin x) \cdot 1) - (-\sin x)}{6\,x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(-\cos x) \cdot x}{6\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6} = f'(0)
\end{aligned}$$

ist f' auch im Punkt $a = 0$ stetig. Folglich ist die Ableitung f' von f stetig, mithin die Funktion f stetig differenzierbar.
Es sei bemerkt, daß wir an verschiedenen Stellen

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1,$$

also die Stetigkeit der Sinus– bzw. der Cosinusfunktion im Punkt $a = 0$, verwendet haben.

2. a) Für das Verhalten der gegebenen Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x}{x},$$

an den Rändern von D_f ergibt sich unter Verwendung der Grenzwerte

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to 0\pm} e^x \underset{\text{exp stetig}}{=} e^0 = 1, \qquad \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$$

durch die entsprechenden Grenzwertbildungen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0, \\
\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} \frac{e^x}{x} = -\infty, \\
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} \frac{e^x}{x} = +\infty, \\
\lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.
\end{aligned}$$

b) Die Funktion f ist als Quotient der Exponentialfunktion und der Identität auf $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, mithin stetig, und für alle $x \in D_f$ ergibt sich nach der Quotientenregel

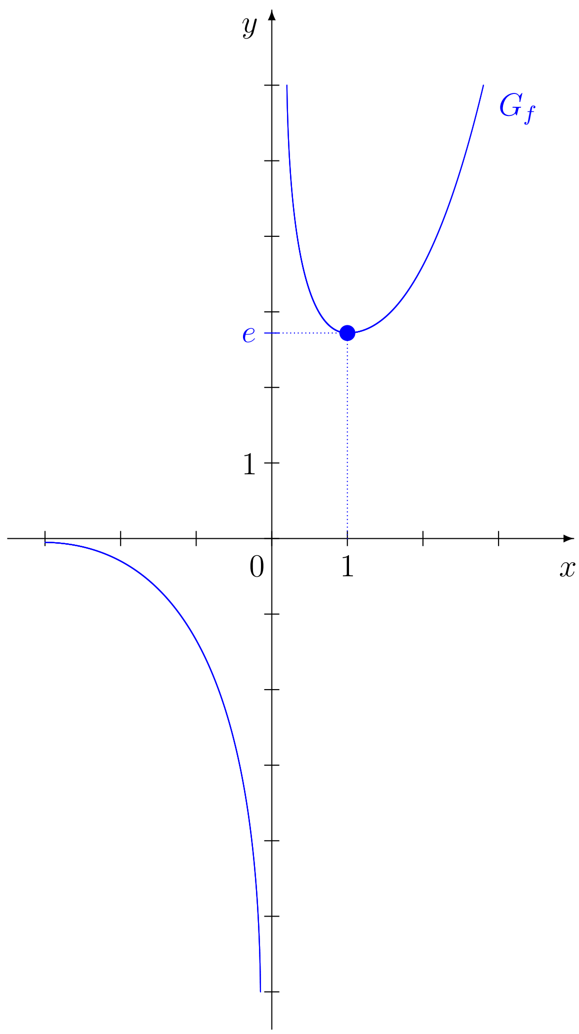
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} \cdot (x-1)$$

mit

$$f'(x) = \underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{>0} \cdot (x-1) \begin{cases} < 0, & \text{für } x < 1 \text{ und } x \neq 0, \\ = 0, & \text{für } x = 1, \\ > 0, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Damit ist f auf $]-\infty, 0[$ und $]0, 1]$ jeweils streng monoton fallend sowie auf $[1, +\infty[$ streng monoton steigend und besitzt folglich genau eine lokale Extremstelle, nämlich ein lokales Minimum in $a = 1$.

c) Nach a) und b) und wegen $f(1) = e$ hat G_f folgendes Aussehen:



3. Gegeben ist die Funktion

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & \text{für } x \neq 1, \\ 1, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

a) Zunächst ist die Funktion f auf den offenen Mengen $]0,1[$ und $]1,+\infty[$, also in allen Punkten $a \in]0,+\infty[$ mit $a \neq 1$, als Quotient des Logarithmus und einer linearen Funktion stetig. Für $a = 1$ ergibt sich im Hinblick auf die Differenzierbarkeit des Logarithmus $(*)$ an der Stelle $a = 1$ zudem

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \underset{\ln 1 = 0}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \underset{(*)}{=} \ln' 1 = \frac{1}{1} = 1 = f(1);$$

damit ist f auch im Punkt $a = 1$ stetig, insgesamt also eine stetige Funktion.

b) Die Funktionen

$$g :]1,+\infty[\to \mathbb{R},\ g(x) = \ln x, \quad \text{und} \quad h :]1,+\infty[\to \mathbb{R},\ h(x) = x - 1,$$

sind differenzierbar, und für alle $x \in]1,+\infty[$ gilt

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad h'(x) = 1 \neq 0;$$

ferner ist

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty.$$

Da nun der Grenzwert

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

existiert, existiert nach der Regel von de l'Hospital auch der Grenzwert

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = 0.$$

c) Für jedes $x > 1$ betrachten wir die Einschränkung $\ln|_{[1,x]}$ des Logarithmus auf das abgeschlossene Intervall $[1,x]$; diese erfüllt die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[1,x]$ und Differenzierbarkeit auf $]1,x[$, und es existiert ein $\xi \in]1,x[$ mit

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln' \xi, \qquad \text{also} \qquad f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \underset{\ln 1 = 0}{=} \frac{1}{\xi}.$$

4. a) Gegeben ist die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+\arctan(x).$$

Während der Arcustangens auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist der Arcuscosinus zwar auf $[-1,1]$ stetig, aber nur auf $]-1,1[$ differenzierbar; die innere Funktion

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

ist (als Quotient einer linearen Funktion und der Verkettung der Quadratwurzel mit einer stets positiven quadratischen Funktion) differenzierbar, und für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt

$$x^2<1+x^2,\qquad \text{also}\qquad |x|<\sqrt{1+x^2},$$

und damit

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}<1,\qquad \text{also}\qquad -1<\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<1.$$

Wegen $W_\varphi\subseteq\,]-1,1[$ ist damit f eine differenzierbare Funktion, und für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{1+x^2}-x\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right)}{\sqrt{1+x^2}^{\,2}}+\frac{1}{1+x^2}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)-x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}^{\,2}-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{1+x^2}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}}\cdot\frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}+\frac{1}{1+x^2}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)}}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=0.
\end{aligned}$$

b) Die auf dem Intervall $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion f mit $f'(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ ist eine konstante Funktion, es gibt also ein $c\in\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=c\qquad\text{für alle}\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Speziell für $x=0$ ergibt sich

$$c=f(0)=\arccos(0)+\arctan(0)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2},$$

so daß sich für alle $x \in \mathbb{R}$ zunächst

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \arctan(x) = c = \frac{\pi}{2}$$

und damit in

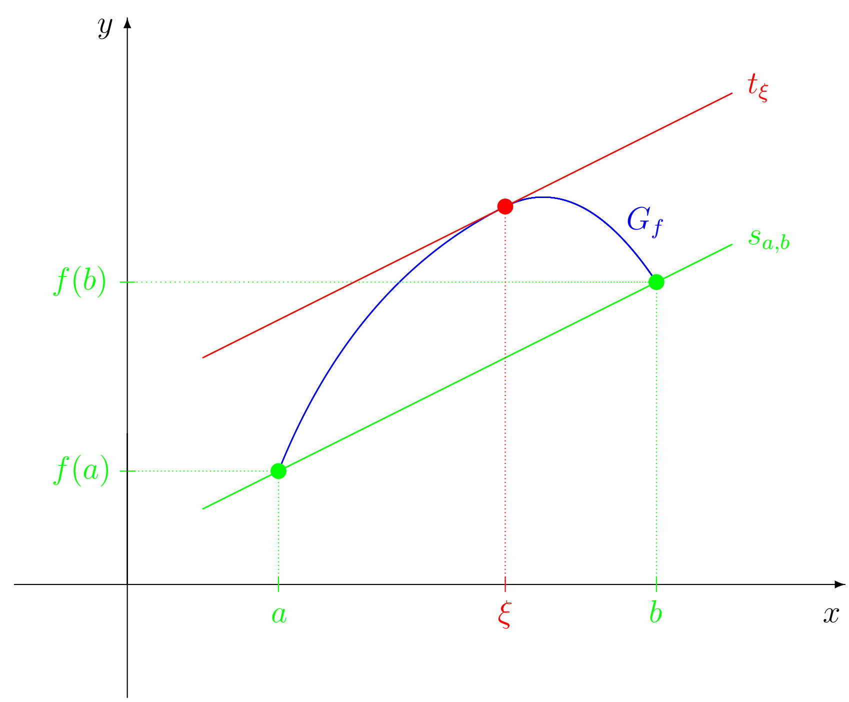
$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

die Behauptung ergibt.

5. a) Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion; dann gibt es ein $\xi \in\,]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Er läßt sich geometrisch wie folgt interpretieren: Die Steigung der Sekante $s_{a,b}$ zwischen zwei Punkten a und b einer differenzierbaren Funktion entspricht der Steigung der Tangente t_ξ an einer geeigneten Zwischenstelle ξ:



b) Da der Arcustangens auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R},$$

erfüllt die Funktion

$$f : [a; b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x,$$

insbesondere die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[a,b]$ und Differenzierbarkeit auf $]a,b[$. Es gibt also ein $\xi \in \,]a,b[$ mit

$$\frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} = \arctan' \xi = \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1,$$

woraus sich wegen $a < b$, also $b - a > 0$, dann in

$$\arctan b - \arctan a \leq b - a$$

die zu beweisende Ungleichung ergibt.

c) Die Funktion

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(\ln x),$$

ist als Verkettung des Cosinus und des Logarithmus differenzierbar, und für alle $x \in [a,b]$ gilt gemäß der Kettenregel

$$f'(x) = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}.$$

Damit genügt f den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, und es gibt ein $\xi \in \,]a,b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi), \quad \text{bzw.} \quad f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a),$$

also

$$\cos(\ln b) - \cos(\ln a) = -\sin(\ln \xi) \cdot \frac{1}{\xi} \cdot (b-a).$$

Wegen $0 < a < \xi < b$ gilt $0 < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$ und $b - a > 0$, so daß sich wegen $|\sin(\ln \xi)| \leq 1$ insgesamt

$$\begin{aligned} |\cos(\ln b) - \cos(\ln a)| &= \left| -\sin(\ln \xi) \cdot \frac{1}{\xi} \cdot (b-a) \right| = \\ &= \underbrace{|-\sin(\ln \xi)|}_{\leq 1} \cdot \left| \frac{1}{\xi} \right| \cdot |b-a| \leq \frac{1}{\xi} \cdot (b-a) < \frac{1}{a} \cdot (b-a) = \frac{b-a}{a} \end{aligned}$$

ergibt.

6. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a < b$ betrachten wir die Einschränkung $f = \arctan|_{[a,b]}$ des Arcustangens auf das abgeschlossene Intervall $[a,b]$, also die Funktion

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x;$$

diese ist differenzierbar und erfüllt damit insbesondere die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[a,b]$ und Differenzierbarkeit auf $]a,b[$. Folglich existiert ein $\xi \in \,]a,b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\arctan b - \arctan a}{b-a};$$

wegen $0 \leq a < \xi < b$ gilt $0 \leq a^2 < \xi^2 < b^2$, also $0 < 1 + a^2 < 1 + \xi^2 < 1 + b^2$ und damit

$$\frac{1}{1+a^2} > \frac{1}{1+\xi^2} > \frac{1}{1+b^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{1+a^2} > \frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} > \frac{1}{1+b^2},$$

woraus sich wegen $a < b$ und damit $b - a > 0$ die Beziehung

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

ergibt.

7. a) Für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ treffen wir die folgenden Definitionen:

   - $F : D \to \mathbb{R}$ heißt eine Integralfunktion von f, wenn

     $$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad \text{für alle} \qquad x \in D$$

     für eine fest gewählte untere Integrationsgrenze $a \in D$ gilt.
   - $F : D \to \mathbb{R}$ heißt eine Stammfunktion von f, wenn F differenzierbar mit $F' = f$, also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, ist.

   b) Für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ besteht zwischen den beiden Begriffen „Integralfunktion von f“ und „Stammfunktion von f“ der folgende Zusammenhang:

   - Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist jede Integralfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ von f differenzierbar mit $F' = f$, also eine Stammfunktion von f.
   - Jede Integralfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ von f besitzt gemäß

     $$F(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$$

     die fest gewählte untere Integrationsgrenze $a \in D$ als Nullstelle; damit ist etwa $F = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wegen $F' = \exp' = \exp$ zwar eine Stammfunktion von $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wegen $F(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ aber keine Integralfunktion von f.

   c) Die Integrandenfunktion

   $$\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \gamma(x) = e^x \cdot \ln x,$$

   ist (als Produkt der Exponentialfunktion und des Logarithmus) stetig; damit ist nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ihre Integralfunktion

   $$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_1^x \gamma(t)\, dt = \int_1^x e^t \ln t\, dt,$$

differenzierbar mit $g'(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Ferner ist γ sogar differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt

$$g''(x) = \gamma'(x) = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x};$$

wegen

$$g'(1) = \gamma(1) = e^1 \cdot \ln 1 = e \cdot 0 = 0$$

und

$$g''(1) = \gamma'(1) = e^1 \cdot \ln 1 + e^1 \cdot \frac{1}{1} = e \cdot 0 + e \cdot 1 = e > 0$$

besitzt g in $x = 1$ ein isoliertes lokales Minimum.

8. a) Wegen $a > 0$ gilt im Hinblick auf das Monotonieverhalten der Quadratwurzel $\sqrt{x^2 + a^2} - x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist die Funktion

$$F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_a(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + a^2} - x\right),$$

als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen selbst stetig differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich nach der Kettenregel

$$F_a'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2} - x} \cdot \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2} - x} \cdot \frac{x - \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = f_a(x),$$

wobei im letzten Schritt der positive Faktor $\sqrt{x^2 + a^2} - x$ gekürzt wird. Damit gilt $F_a' = f_a$, also ist F_a eine Stammfunktion von f_a.

b) Die gegebene Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

ist als Verkettung stetiger Funktionen selbst stetig, insbesondere auf $\left[0; \frac{3}{4}\, a\right]$ integrierbar, und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich gemäß a)

$$\int_0^{\frac{3}{4}a} f_a(x)\, dx = F_a\left(\tfrac{3}{4}a\right) - F_a(0) = \ln\left(\sqrt{\tfrac{9}{16}a^2 + a^2} - \tfrac{3}{4}a\right) - \ln\sqrt{a^2} =$$
$$= \ln\left(\sqrt{\tfrac{25}{16}\, a^2} - \tfrac{3}{4}a\right) - \ln a = \ln\left(\tfrac{1}{2}a\right) - \ln a = \ln\frac{\frac{1}{2}a}{a} = \ln\tfrac{1}{2} = -\ln 2.$$

c) Nach a) ist die auf dem Intervall $\mathbb{R}$ erklärte Funktion F_a differenzierbar mit

$$F_a'(x) = f_a(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} < 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist F_a streng monoton fallend, insbesondere also invertierbar, und ihre Umkehrfunktion F_a^{-1} ist zudem differenzierbar. Nach der Regel über die Ableitung der Umkehrfunktion gilt für $y = F_a(x)$ dann

$$\left(F_a^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{F_a'(x)} = \frac{1}{f_a(x)}.$$

Wir wählen $x = 0$; damit ist $y = F_a(x) = F_a(0) = \ln a$ gemäß b) und folglich

$$\left(F_a^{-1}\right)'(\ln a) = \frac{1}{f_a(0)} = -\sqrt{0^2 + a^2} = -a.$$

9. a) Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x - \arctan x$, ist stetig differenzierbar mit

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2};$$

damit ist nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x - \arctan x + C.$$

b) Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1+x^2\right)dx &= \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln\left(1+x^2\right)}_{v(x)}\,dx \\ &= \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln\left(1+x^2\right)}_{v(x)} - \int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{v'(x)}\,dx \\ &= x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\ &\overset{\text{a)}}{=} x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\arctan x + C.\end{aligned}$$

c) Die angegebene Substitution $x = t^6$ mit $t > 0$ ergibt $\frac{dx}{dt} = 6t^5$, also formal $dx = 6t^5\,dt$, und damit

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}dx &= \int \frac{6t^5}{\sqrt{t^6}(1+\sqrt[3]{t^6})}dt = \int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt \\ &= 6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt \overset{\text{a)}}{=} 6t - 6\arctan t + C \\ &\overset{x=\sqrt[6]{t}}{=} 6\sqrt[6]{x} - 6\arctan\sqrt[6]{x} + C.\end{aligned}$$

10. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$2\,x^2 + 12\,x - 22 = (2\,x^2 + 12\,x - 32) + 10 = 2\,(x^2 + 6\,x - 16) + 10$$

und

$$x^2 + 6\,x - 16 = (x+8)(x-2).$$

Wir betrachten die gebrochenrationale Integrandenfunktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2\,x^2 + 12\,x - 22}{x^2 + 6\,x - 16};$$

für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\,(x^2 + 6\,x - 16) + 10}{x^2 + 6\,x - 16} \\ &= 2 + \frac{10}{x^2 + 6\,x - 16} = 2 + \frac{10}{(x+8)(x-2)}, \end{aligned}$$

und wir bestimmen nun Konstanten α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{10}{(x+8)(x-2)} = \frac{\alpha}{x+8} + \frac{\beta}{x-2}.$$

Wegen

$$\frac{\alpha}{x+8} + \frac{\beta}{x-2} = \frac{\alpha \cdot (x-2) + \beta \cdot (x+8)}{(x+8)(x-2)} = \frac{(\alpha + \beta)\,x + (-2\,\alpha + 8\,\beta)}{(x+8)(x-2)}$$

für alle $x \in [0,1]$ liefert der Koeffizientenvergleich

$$\alpha + \beta = 0 \qquad \text{und} \qquad -2\,\alpha + 8\,\beta = 10,$$

also $\alpha = -1$ und $\beta = 1$; damit gilt

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+8} + \frac{1}{x-2} \qquad \text{für alle} \qquad x \in [0,1]\,.$$

Damit gilt

$$\int f(x)\,dx = 2\,x - \ln|x+8| + \ln|x-2| + C,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{2\,x^2 + 12\,x - 22}{x^2 + 6\,x - 16}\,dx = \Big[2\,x - \ln|x+8| + \ln|x-2|\Big]_0^1 = \\ &= \Big[2 \cdot 1 - \ln|1+8| + \ln|1-2|\Big] - \Big[2 \cdot 0 - \ln|0+8| + \ln|0-2|\Big] = \\ &= \Big[2 - \underbrace{\ln 9}_{=2\ln 3} + \underbrace{\ln 1}_{=0}\Big] - \Big[0 - \underbrace{\ln 8}_{=3\ln 2} + \ln 2\Big] = 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2. \end{aligned}$$

11. a) Für die $(n+1)$–mal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} T_n : D \to \mathbb{R}, \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = \\ &= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n, \end{aligned}$$

das n–te Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt $a \in D$; gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restglieds gibt ein ξ zwischen a und x mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

b) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+\pi) \cdot \sin x,$$

ist als Produkt einer linearen Funktion und des Sinus beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sin x + (x+\pi) \cdot \cos x \\ &= \sin x + (x+\pi) \cdot \cos x, \\ f''(x) &= \cos x + (1 \cdot \cos x + (x+\pi) \cdot (-\sin x)) \\ &= 2 \cos x - (x+\pi) \cdot \sin x, \\ f'''(x) &= -2 \sin x - (1 \cdot \sin x + (x+\pi) \cdot \cos x) \\ &= -3 \sin x - (x+\pi) \cdot \cos x. \end{aligned}$$

- Im Entwicklungspunkt $a = \pi$ ist

  $$f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = -2\pi \quad \text{und} \quad f''(\pi) = -2,$$

  und für das Taylorpolynom T_2 von f ergibt sich damit

  $$\begin{aligned} T_2(x) &= f(\pi) + f'(\pi) \cdot (x-\pi) + \frac{1}{2} f''(\pi) \cdot (x-\pi)^2 \\ &= 0 + (-2\pi) \cdot (x-\pi) + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot (x-\pi)^2 \\ &= -x^2 + \pi^2 \end{aligned}$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = \pi$ und x mit

  $$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-\pi)^3$$

  gibt; da $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ gilt auch $\xi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ und wir erhalten

  $$\begin{aligned} |f'''(\xi)| &= |-3 \sin\xi - (\xi+\pi) \cdot \cos\xi| \\ &\le |-3 \sin\xi| + |(\xi+\pi) \cdot \cos\xi| = 3 \cdot \underbrace{|\sin\xi|}_{\le 1} + |\xi+\pi| \cdot \underbrace{|\cos\xi|}_{\le 1} \\ &\le 3 \cdot 1 + (\xi+\pi) \cdot 1 = \underbrace{3}_{\le\pi} + \underbrace{\xi}_{\le 2\pi} + \pi \le \pi + 2\pi + \pi \le 6\pi \end{aligned}$$

und folglich die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-\pi)^3 \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \underbrace{|f'''(\xi)|}_{\le 6\pi} \cdot \underbrace{|x-\pi|^3}_{\le (\frac{\pi}{2})^3} \le \frac{1}{6} \cdot 6\,\pi \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^4}{8}.$$

12. a) Die gegebene Funktion

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar, und für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

und damit

$$f''(x) = 2\,\tan x \cdot \tan' x = 2\,\tan x \cdot \left(1 + \tan^2 x\right) = 2\,\tan x + 2\,\tan^3 x$$

sowie

$$f'''(x) = 2\,\tan' x + 6\,\tan^2 x \cdot \tan' x =$$
$$= 2 \cdot \left(1 + \tan^2 x\right) + 6\,\tan^2 x \cdot \left(1 + \tan^2 x\right) =$$
$$= 2 + 8\,\tan^2 x + 6\,\tan^4 x.$$

Wegen $\tan 0 = 0$ ist $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ und $f''(0) = 0$, so daß sich für das zweite Taylorpolynom T_2 von f also

$$T_2(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x$$

für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ ergibt.

b) Für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ist nach der Taylorformel $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$, und nach der Lagrangeschen Darstellung von $R_3(x)$ gibt es ein ξ_x zwischen 0 und x mit

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!} \cdot x^3.$$

Für $x \to 0$ gilt mit dem Schrankenlemma auch $\xi_x \to 0$, wegen der Stetigkeit von f''' also $f'''(\xi_x) \to f'''(0) = 2$, und wir erhalten

$$\frac{f(x) - T_2(x)}{x^2} = \frac{R_3(x)}{x^2} = \frac{1}{3!} \underbrace{f'''(\xi_x)}_{\to 2} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \xrightarrow{x \to 0} 0.$$

c) Gemäß b) gilt

$$f(x) - T_2(x) = R_3(x) = \frac{1}{3!} f'''(\xi_x) \cdot x^3$$

für alle $0 < x < \frac{\pi}{2}$; wegen $x^3 > 0$ bleibt damit $\frac{1}{3!} f'''(\xi_x) > \frac{1}{3}$ zu zeigen. Das ist der Fall, denn für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt $0 < \xi_x < \frac{\pi}{2}$ und damit

$$\frac{1}{3!} f'''(\xi_x) = \frac{1}{6}\big(2 + 8\tan^2 \xi_x + 6\tan^4 \xi_x\big) = \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{4}{3}\tan^2 \xi_x + \tan^4 \xi_x}_{>0} > \frac{1}{3}.$$

13. Gegeben ist die Funktion

$$f : \left]-\infty, \tfrac{1}{4}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\,x}}.$$

a) Wir zeigen für alle $n \in \mathbb{N}_0$, daß die n–te Ableitung $f^{(n)}$ von f die Gestalt

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} \cdot (1 - 4\,x)^{-(n + \frac{1}{2})} \qquad \text{für alle} \quad x \in \left]-\infty, \tfrac{1}{4}\right[$$

besitzt, mit Hilfe vollständiger Induktion:

- Für „$n = 0$“ gilt

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\,x}} = (1 - 4\,x)^{-\frac{1}{2}} \\ &\underset{0!=1}{=} \frac{(2 \cdot 0)!}{0!} \cdot (1 - 4\,x)^{-(0 + \frac{1}{2})} \qquad \text{für alle} \quad x \in \left]-\infty, \tfrac{1}{4}\right[. \end{aligned}$$

- Für „$n \to n + 1$“ ergibt sich aus der Induktionsvoraussetzung

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} \cdot (1 - 4\,x)^{-(n + \frac{1}{2})} \qquad \text{für alle} \quad x \in \left]-\infty, \tfrac{1}{4}\right[$$

durch erneutes Differenzieren die Induktionsbehauptung

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left(\frac{(2n)!}{n!} \cdot (1 - 4\,x)^{-(n + \frac{1}{2})}\right)' \\ &= \frac{(2n)!}{n!} \cdot \Big(-(n + \tfrac{1}{2}) \cdot (1 - 4\,x)^{-(n + \frac{1}{2}) - 1} \cdot (-4)\Big) \\ &= \frac{(2n)!}{n!} \cdot \Big((2n + 1) \cdot 2 \cdot (1 - 4\,x)^{-(n + \frac{1}{2}) - 1}\Big) \\ &= \frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{(2n + 1) \cdot (2n + 2)}{n + 1} \cdot (1 - 4\,x)^{-(n + \frac{1}{2}) - 1} \\ &= \frac{(2(n + 1))!}{(n + 1)!} (1 - 4\,x)^{-((n + 1) + \frac{1}{2})} \quad \text{für alle} \quad x \in \left]-\infty, \tfrac{1}{4}\right[. \end{aligned}$$

b) Gemäß a) gilt

$$f^{(n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!} \cdot (1 - 4 \cdot 0)^{-(n + \frac{1}{2})} = \frac{(2n)!}{n!} \cdot 1^{-(n + \frac{1}{2})} = \frac{(2n)!}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so daß sich für die Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

für alle $x \in \left]-\infty, \frac{1}{4}\right[$ ergibt; diese Potenzreihe besitzt also die Koeffizienten

$$c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

und wegen

$$\begin{aligned} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \left|\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}\right| = \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n! \cdot n!}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1) \cdot (n+1)} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \cdot 2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{2+0}{1+0} \cdot 2 = 4 = c \end{aligned}$$

folglich den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$.

14. Für den Punkt $a \in \mathbb{R}$ und die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wird die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-a)^n$$

mit dem Konvergenzradius $\varrho \in \mathbb{R}^+$ betrachtet.

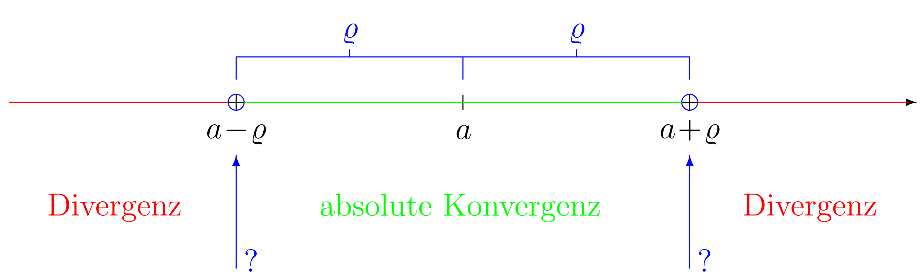
a) Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \; (x-a)^n$$

ist

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \varrho$, also auf $]a-\varrho, a+\varrho[$, absolut konvergent,
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| > \varrho$, also auf $]-\infty, a-\varrho[\, \cup \,]a+\varrho, +\infty[$, divergent;

für die beiden verbleibenden Punkte $x = a \pm \varrho$ ist keine allgemeingültige Aussage möglich:



b) Für die Funktion

$$f :]a-\varrho,\ a+\varrho[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ (x-a)^n\,,$$

gilt gemäß dem Hauptsatz über Potenzreihen:

- f ist stetig, und die gliedweise integrierte Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\ (x-a)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n}\ (x-a)^n$$

  stellt auf $]a-\varrho,\ a+\varrho[$ eine Stammfunktion F von f dar.

- f ist differenzierbar, und die gliedweise differenzierte Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n\ (x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c_{n+1}\ (x-a)^n$$

  stellt auf $]a-\varrho,\ a+\varrho[$ die Ableitung f' von f dar.

- f ist beliebig oft differenzierbar, und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f^{(n)}(a) = n! \cdot c_n \qquad \text{bzw.} \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

15. Gegeben ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (x-2)^n$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = 2$ und den Koeffizienten $c_n = (-1)^n \cdot (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+2)}{(-1)^n \cdot (n+1)}\right| = \frac{n+2}{n+1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1+0}{1+0} = 1 = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 1$; damit ist sie

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < 1$, also auf $]1,3[$, absolut konvergent,
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| > 1$, also auf $]-\infty, 1[\, \cup\,]3, +\infty[$, divergent.

Für $|x-2| = 1$, also für $x \in \{1, 3\}$, gilt

$$|c_n \cdot (x-2)^n| = \underbrace{|c_n|}_{=n+1} \cdot \underbrace{|x-2|^n}_{=1^n} = n+1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

damit ist die Folge der Reihenglieder keine Nullfolge und folglich die Reihe divergent. Somit ergibt sich für die gegebene Potenzreihe insgesamt das Konvergenzintervall $D =]1,3[$.

b) Die von der gegebenen Potenzreihe auf ihrem offenen Konvergenzintervall $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f :]1,3[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (x-2)^n\,,$$

ist nach dem Hauptsatz über Potenzreihen stetig und darf gliedweise integriert werden, so daß $F :]1,3[\to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x-2)^{n+1} \\ &= (x-2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x-2)^n = (x-2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2-x)^n \\ &\underset{|2-x|<1}{\overset{(*)}{=}} (x-2) \cdot \frac{1}{1-(2-x)} = \frac{x-2}{x-1} \end{aligned}$$

eine Stammfunktion von f ist; dabei geht bei $(*)$ die Summenformel für geometrische Reihen ein. Damit erhält man

$$f(x) = F'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x-2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

für alle $x \in]1,3[$.

16. a) Zu betrachten ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \,(x-a)^n \quad \text{mit} \quad a = 1 \quad \text{und} \quad c_n = \frac{1}{2^n \cdot n} \quad \text{für} \;\; n \in \mathbb{N};$$

wegen

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n \cdot n}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[n]{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} = c$$

ergibt sich der Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 2$.

b) Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist die Funktion

$$f :]-1,3[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot n},$$

differenzierbar, und die gliedweise differenzierte Potenzreihe stellt ihre Ableitungsfunktion

$$\begin{aligned} f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{2^n} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

für alle $|x-1|<2$ dar. Im letzten Ausdruck erkennen wir die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ mit $q = \frac{x-1}{2}$, daher gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2-(x-1)} = \frac{1}{3-x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\left|\frac{x-1}{2}\right| < 1$, also $|x-1| < 2$.

c) Für alle $|x-1|<2$ gilt gemäß b)

$$f'(x) = \frac{1}{3-x} = -\frac{-1}{3-x} \qquad \text{und damit} \qquad f(x) = -\ln(3-x) + c$$

mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$; wegen

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-1)^n}{2^n \cdot n} = 0 \qquad \text{und} \qquad -\ln(3-1) = -\ln 2$$

ergibt sich $c = \ln 2$.