MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Klausur
13.08.2020

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

1. a)

- Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf der Definitionsmenge $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* im Punkt $a \in D$, wenn der Differentialquotient

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

im eigentlichen Sinne existiert.

- Für die gegebene Funktion

$$f : \,]-1, +\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 1, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = \\ &\underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{2\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (x+1)}{2\,x\,(x+1)} = \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{2\,x\,(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{2\,(x+1)} = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

damit ist f im Punkt $a = 0$ differenzierbar, wobei für „$\frac{0}{0}$“ die Stetigkeit des Logarithmus (an der Stelle $b = 1$) mit $\ln 1 = 0$ eingeht.

b)

- Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* besagt: seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion; dann gibt es ein $\xi \in \,]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist die Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x,$$

als Einschränkung der Exponentialfunktion auf das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ differenzierbar mit

$$f'(x) = e^x \qquad \text{für alle} \qquad x \in [a, b]\,,$$

erfüllt also insbesondere die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[a,b]$ und Differenzierbarkeit auf $]a,b[$; damit existiert ein $\xi \in\,]a,b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{bzw.} \qquad e^{\xi} = \frac{e^b - e^a}{b-a}.$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton wächst, folgt aus $a < \xi < b$ schon $e^a < e^{\xi} < e^b$, also

$$e^a < \frac{e^b - e^a}{b-a} < e^b,$$

und wegen $b - a > 0$ damit die Beziehung

$$e^a\,(b-a) < e^b - e^a < e^b\,(b-a).$$

2. Gegeben ist die Funktion

$$f : \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e \cdot \ln x}{x} = e \cdot \frac{\ln x}{x},$$

also ein skalares Vielfaches (mit dem Faktor $e > 0$) des Quotienten des natürlichen Logarithmus und der Identität auf dem Intervall $]0,+\infty[$.

a) Für alle $x \in\,]0,+\infty[$ gilt

$$f(x) = 0 \iff \frac{e \cdot \ln x}{x} = 0 \iff e \cdot \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1;$$

damit ist $x_0 = 1$ die einzige Nullstelle von f. Ferner ist f differenzierbar, insbesondere also stetig, und für alle $x \in\,]0,+\infty[$ gilt

$$f'(x) = e \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = e \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{e}{x^2} \cdot (1 - \ln x)\,;$$

damit ergibt sich:

- für alle $x \in\,]0,e[$ ist $\ln x < \ln e = 1$ und damit

$$f'(x) = \underbrace{\frac{e}{x^2}}_{>0} \cdot \underbrace{(1-\ln x)}_{>0} > 0;$$

damit ist f auf dem Intervall $]0,e]$ streng monoton wachsend;

- für alle $x \in\,]e,+\infty[$ ist $\ln x > \ln e = 1$ und damit

$$f'(x) = \underbrace{\frac{e}{x^2}}_{>0} \cdot \underbrace{(1-\ln x)}_{<0} < 0;$$

damit ist f auf dem Intervall $[e,+\infty[$ streng monoton fallend.

Folglich besitzt f genau eine globale Extremstelle, nämlich in $a = e$ ein globales Maximum mit

$$f(e) = \frac{e \cdot \ln e}{e} = \frac{e \cdot 1}{e} = 1.$$

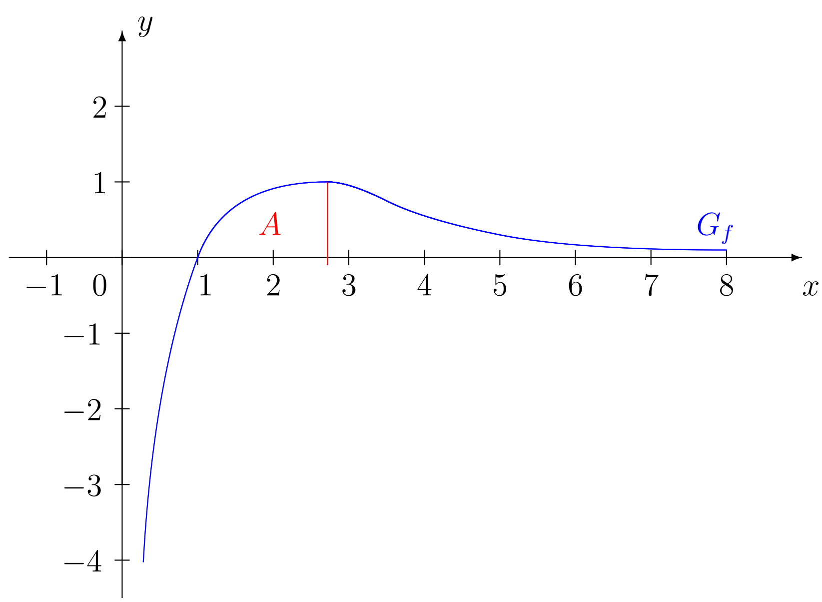
b) Es ist zum einen

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\overbrace{e}^{>0} \cdot \overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0+}} = -\infty$$

sowie zum anderen

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{e}^{>0} \cdot \overbrace{\ln x}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}} \underset{\text{„}\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\text{“}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e}{x} = 0.$$

Unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse erhält man die folgende Skizze:



c) Die Funktion

$$F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad \frac{e}{2} \cdot (\ln x)^2,$$

ist als skalares Vielfaches (mit dem Faktor $\frac{e}{2} > 0$) des Quadrats des natürlichen Logarithmus differenzierbar, und für alle $x \in]0, +\infty[$ gilt

$$F'(x) = \frac{e}{2} \cdot \left(2 \ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = e \cdot \frac{\ln x}{x} = f(x);$$

damit ist F eine Stammfunktion von f, und nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ergibt sich mit $\ln e = 1$ und $\ln 1 = 0$ damit

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x)\,dx &= \Big[F(x)\Big]_1^e = F(e) - F(1) = \\ &= \frac{e}{2}\cdot(\ln e)^2 - \frac{e}{2}\cdot(\ln 1)^2 = \frac{e}{2}\cdot 1^2 - \frac{e}{2}\cdot 0^2 = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

Damit besitzt das vom Graph G_f sowie der x–Achse und der Gerade $x = e$ begrenzte Flächenstück A den Flächeninhalt $\frac{e}{2}$.

3. a) Für die $(n+1)$–mal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} T_n : D \to \mathbb{R}, \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k = \\ &= f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n, \end{aligned}$$

das n–te Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt $a \in D$; gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restglieds gibt ein ξ zwischen a und x mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}.$$

b) Die gegebene Funktion

$$f : \left]-\tfrac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+2\,x} = (1+2\,x)^{\frac{1}{2}},$$

ist (als Verkettung der Wurzelfunktion und einer linearen Funktion) beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\tfrac{1}{2}\cdot(1+2\,x)^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot 2 &&= (1+2\,x)^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= \left(-\tfrac{1}{2}\cdot(1+2\,x)^{-\frac{3}{2}}\right)\cdot 2 &&= -(1+2\,x)^{-\frac{3}{2}}, \\ f'''(x) &= -\left(-\tfrac{3}{2}\cdot(1+2\,x)^{-\frac{5}{2}}\right)\cdot 2 &&= 3\,(1+2\,x)^{-\frac{5}{2}}; \end{aligned}$$

damit ergibt sich:

- Im Entwicklungspunkt $a = 0$ ist

$$\begin{aligned} f(0) &= (1+2\cdot 0)^{\frac{1}{2}} &&= 1^{\frac{1}{2}} &&= 1, \\ f'(0) &= (1+2\cdot 0)^{-\frac{1}{2}} &&= 1^{-\frac{1}{2}} &&= 1, \\ f''(0) &= -(1+2\cdot 0)^{-\frac{3}{2}} &&= -(1^{-\frac{3}{2}}) &&= -1, \end{aligned}$$

und für das Taylorpolynom T_2 von f ergibt sich damit

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(0) + f'(0)\cdot(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\cdot(x-0)^2 \\ &= 1 + 1\cdot x + \frac{-1}{2}\cdot x^2 = 1 + x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

für alle $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

- Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, wobei es zu jedem $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und x mit

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x-0)^3 = \frac{f'''(\xi)}{6} \cdot x^3$$

gibt; da $x \in [0, +\infty[$ gilt auch $\xi \in [0, +\infty[$, und wir erhalten

$$f'''(\xi) = 3 \cdot \underbrace{\underbrace{(1+2\,\xi)}_{\geq 1}{}^{-\frac{5}{2}}}_{\leq 1,\text{ da } -\frac{5}{2}<0} \leq 3 \cdot 1 = 3$$

und folglich die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{6} \cdot x^3\right| = \frac{f'''(\xi)}{6} \cdot x^3 \leq \frac{3}{6} \cdot x^3 = \frac{x^3}{2};$$

dabei geht $f'''(\xi) \geq 0$ und $x \geq 0$ ein.

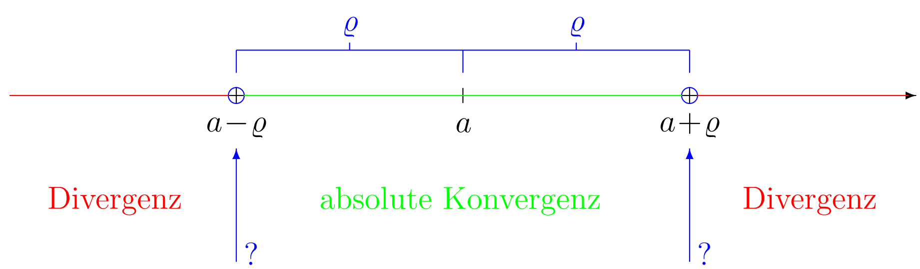
4. a) Besitzt die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$

mit dem Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$ und der Koeffizientenfolge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ den Konvergenzradius $\varrho \in \mathbb{R}^+$, so ist sie

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \varrho$, also auf $]a-\varrho, a+\varrho[$, absolut konvergent,
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| > \varrho$, also auf $]-\infty, a-\varrho[\, \cup \,]a+\varrho, +\infty[$, divergent;

für die beiden verbleibenden Punkte $x = a \pm \varrho$ ist keine allgemeingültige Aussage möglich:



b) - Gegeben ist nun die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}\,(x+1)^n$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = -1$ und den Koeffizienten $c_n = \dfrac{n+1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{n+2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n+1}\right| = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 2$.

- Die von der gegebenen Potenzreihe auf dem offenen Intervall

$$]a-\varrho, a+\varrho[\; = \;](-1)-2, (-1)+2[\; = \;]-3,1[$$

definierte Funktion

$$f :]-3,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \, (x+1)^n \,,$$

ist nach dem Hauptsatz über Potenzreihen stetig und besitzt insbesondere eine Stammfunktion $F :]-3,1[\to \mathbb{R}$, die durch die gliedweise integrierte Potenzreihe gegeben wird; für alle $x \in]-3,1[$ gilt also

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, (x+1)^{n+1} \\ &= (x+1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, (x+1)^n = (x+1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n \\ &\underset{\left|\frac{x+1}{2}\right|<1}{\overset{(*)}{=}} (x+1) \cdot \frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = (x+1) \cdot \frac{2}{2-(x+1)} = \frac{2\,(x+1)}{1-x}, \end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die Summenformel für geometrische Reihen eingeht.

- Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechung gilt $F' = f$, und wir erhalten damit

$$\begin{aligned} f(x) = F'(x) &= \frac{2 \cdot (1-x) - 2\,(x+1) \cdot (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{(2-2\,x) + (2\,x+2)}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

für alle $x \in]-3,1[$.