MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Klausur
13.08.2020

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

1. a)
   - Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf der Definitionsmenge $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ definiere man den Begriff „f ist differenzierbar im Punkt $a \in D$.“ (1)
   - Man zeige, daß die Funktion

$$f : \,]-1, +\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 1, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

   im Punkt $a = 0$ differenzierbar ist. (2)

   b)
   - Man formuliere (mit allen Voraussetzungen) den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. (1)
   - Man zeige für alle a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Beziehung

$$e^a\,(b-a) < e^b - e^a < e^b\,(b-a) \qquad (2)$$

2. Gegeben sei die Funktion

$$f : \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e \cdot \ln x}{x}.$$

   a) Man untersuche f auf Nullstellen sowie Monotonieintervalle und globale Extremstellen. (2)

   b) Man bestimme die Grenzwerte von $f(x)$ für $x \to 0+$ und für $x \to +\infty$ und skizziere den Graphen G_f von f. (2)

   c) Man zeige, daß

$$F : \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{e}{2} \cdot (\ln x)^2,$$

   eine Stammfunktion von f ist, berechne damit das bestimmte Integral

$$\int_1^e f(x)\,dx$$

   und interpretiere seinen Wert geometrisch. (2)

3. a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$–mal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ sowie $a \in D$. Man gebe das n–te Taylorpolynom T_n von f zum Entwicklungspunkt a sowie die Langrangesche Darstellung des Restglieds R_{n+1} an. (1)

   b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \left]-\tfrac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 + 2\,x}.$$

   - Man bestimme das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$. (2)
   - Für alle $x \in [0, +\infty[$ zeige man die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{x^3}{2}. \tag{3}$$

4. a) Für den Punkt $a \in \mathbb{R}$ und die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ betrachte man die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-a)^n$$

   mit Konvergenzradius $\varrho \in \mathbb{R}^+$. Man erläutere, welche Konvergenz- bzw. Divergenzaussagen für die Potenzreihe mit Hilfe ihres Konvergenzradius ϱ getroffen werden können, und veranschauliche diese Bereiche auf der Zahlengeraden. (2)

   b) - Man zeige, daß die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \, (x+1)^n$$

   den Konvergenzradius $\varrho = 2$ besitzt. (1)
   - Man begründe, daß die Funktion

$$f :]-3, 1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \, (x+1)^n \,,$$

   eine Stammfunktion $F :]-3, 1[\to \mathbb{R}$ besitzt, und gebe F zunächst als Potenzreihe und dann als elementare Funktion an. (2)
   - Man bestimme hieraus eine Darstellung von f aus b) als elementare Funktion. (1)