MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 13
06.08.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

49. Wir bestimmen zunächst die Schnittpunkte der gegebenen Kurve

$$f : [0,\infty[\to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (x(t),\ y(t)) = \left(\tfrac{t^6}{6},\ 2 - \tfrac{t^4}{4}\right).$$

mit den beiden Koordinatenachsen:

- Für den Schnittpunkt S_y mit der y–Achse gilt

$$x(t) = 0 \iff \frac{t^6}{6} = 0 \iff t^6 = 0 \iff t = 0;$$

damit ergibt sich $y(0) = 2$ und folglich $S_y = (0; 2)$.

- Für den Schnittpunkt S_x mit der x–Achse gilt

$$y(t) = 0 \iff 2 - \frac{t^4}{4} = 0 \iff t^4 = 8 \iff t = \sqrt[4]{8};$$

damit ergibt sich $x(\sqrt[4]{8}) = \frac{1}{6}\left(\sqrt[4]{8}\right)^6 = \frac{1}{6}\sqrt{2}^{\,9}$ und folglich $S_x = \left(\frac{1}{6}\sqrt{2}^{\,9}; 0\right)$.

Des weiteren ist die Kurve f stetig differenzierbar mit

$$f'(t) = \left(t^5,\ -t^3\right)$$

und damit

$$\|f'(t)\| = \sqrt{\left(t^5\right)^2 + \left(-t^3\right)^2} = \sqrt{t^{10} + t^6} = \sqrt{t^6\left(t^4+1\right)} = \\ = \sqrt{t^6} \cdot \sqrt{t^4+1} = \left|t^3\right| \cdot \sqrt{t^4+1} \underset{t\geq 0}{=} t^3 \cdot \sqrt{t^4+1}$$

für alle $t \in [0,\infty[$; insbesondere ist die Kurve f auf dem Intervall $\left[0; \sqrt[4]{8}\right]$ rektifizierbar, und unter Verwendung der Substitution

$$u = g(t) = t^4 + 1 \quad \text{mit} \quad \frac{du}{dt} = 4\,t^3, \quad \text{also} \quad du = 4\,t^3\,dt,$$

ergibt sich für ihre Bogenlänge zwischen den Schnittpunkten mit den beiden Koordinatenachsen dann

$$L = \int_0^{\sqrt[4]{8}} \|f'(t)\|\,dt = \int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3 \cdot \sqrt{t^4+1}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^4+1} \cdot 4\,t^3\,dt = \\ = \frac{1}{4}\int_{g(0)}^{g(\sqrt[4]{8})} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{4}\int_1^9 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{27-1}{6} = \frac{13}{3}.$$

50. a) Die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),$$

ist (als Summe und Verkettung differenzierbarer Funktionen) selbst differenzierbar; für die Ableitung des ersten Summanden

$$F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1+x^2}$$

verwenden wir die Produktregel und (für die Ableitung des zweiten Faktors) die Kettenregel und erhalten

$$F_1'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2\,x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; für die Ableitung des zweiten Summanden

$$F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

verwenden wir dann (zweimal) die Kettenregel und erhalten

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (2\,x)\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2+1}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{\sqrt{1+x^2}^{\,2}}{2\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} = f(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist F eine Stammfunktion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

b) Die gegebene Kurve

$$\gamma : [0; 6\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = t \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot \cos t \\ t \cdot \sin t \end{pmatrix},$$

besitzt die beiden stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen

$$\gamma_1 : [0; 6\pi] \to \mathbb{R}, \quad \gamma_1(t) = t \cdot \cos t,$$

mit

$$\gamma_1'(t) = 1 \cdot \cos t + t \cdot (-\sin t) = \cos t - t\,\sin t$$

für alle $t \in [0; 6\pi]$ und

$$\gamma_2 : [0; 6\pi] \to \mathbb{R}, \quad \gamma_2(t) = t \cdot \sin t,$$

mit

$$\gamma_2'(t) = 1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t = \sin t + t\,\cos t$$

für alle $t \in [0; 6\pi]$; folglich ist γ eine stetig differenzierbare Kurve, und für alle $t \in [0; 6\pi]$ gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - t\,\sin t \\ \sin t + t\,\cos t \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 = (\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 = \\ &= \left(\cos^2 t - 2\cos t \cdot t \sin t + t^2 \sin^2 t\right) + \left(\sin^2 t + 2 \sin t \cdot t \cos t + t^2 \cos^2 t\right) = \\ &= \underbrace{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}_{=1} + t^2 \underbrace{\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}_{=1} = 1 + t^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + t^2} = f(t).$$

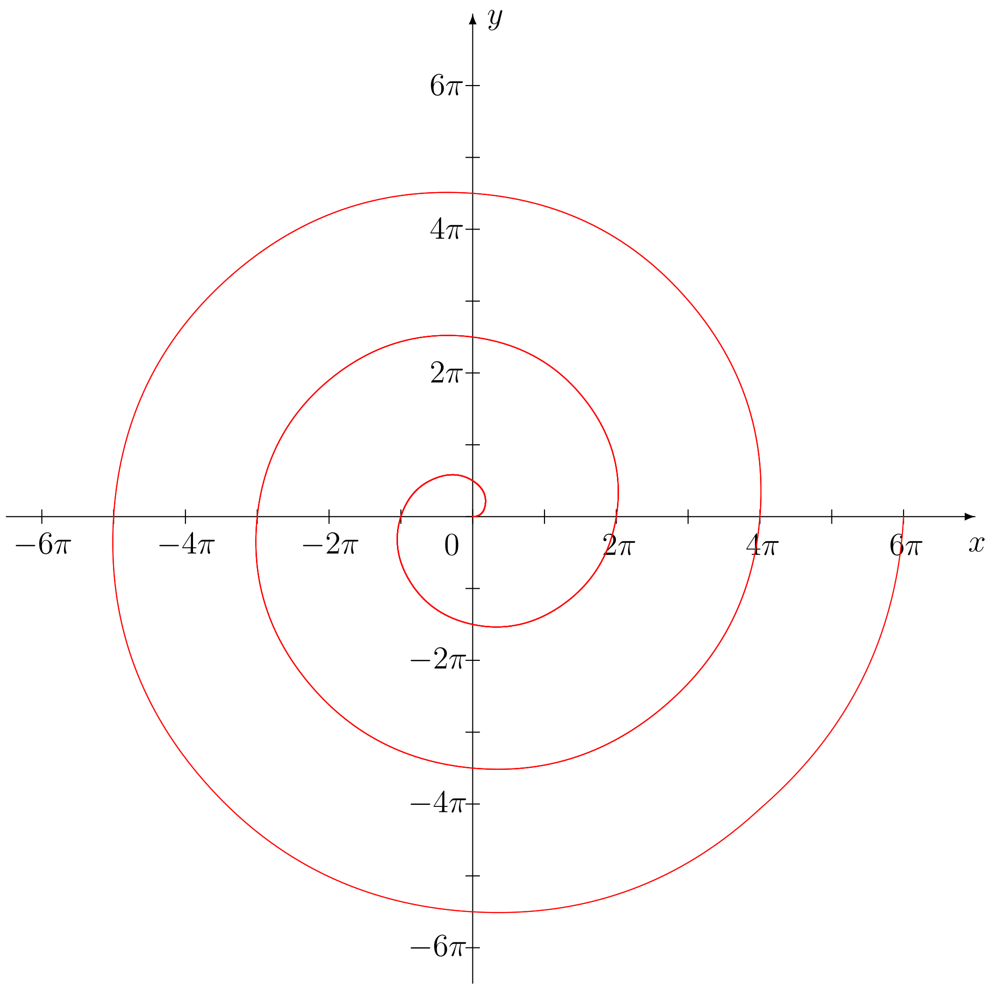
Die stetig differenzierbare Kurve γ ist insbesondere rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge L gilt

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{6\pi} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{6\pi} f(t)\,dt = [F(t)]_0^{6\pi} = F(6\pi) - F(0) = \\ &= \left(\frac{6\pi}{2}\sqrt{1 + (6\pi)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(6\pi + \sqrt{1 + (6\pi)^2}\right)\right) - \\ &\quad - \left(\frac{0}{2}\sqrt{1 + 0^2} + \frac{1}{2}\ln\left(0 + \sqrt{1 + 0^2}\right)\right) = \\ &= 3\pi\sqrt{1 + 36\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(6\pi + \sqrt{1 + 36\pi^2}\right). \end{aligned}$$

c) Für die Skizze der Bildmenge

$$\gamma\left([0; 6\pi]\right) = \{\gamma(t) \mid 0 \le t \le 6\pi\}$$

kann man zunächst für einige Werte von t, etwa den Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, den Kurvenpunkt $\gamma(t)$ und den Tangentialvektor $\gamma'(t)$ berechnen und in das Koordinatensystem eintragen, um dann die entstehende Spirale zu zeichnen:



51. a) Die gegebene Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(t^2 - 1,\ t\left(t^2 - 1\right)\right) = \left(t^2 - 1,\ t^3 - t\right),$$

ist stetig differenzierbar, und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(t) = \left(2\,t,\ 3\,t^2 - 1\right).$$

Damit besitzt f in denjenigen Kurvenpunkten $f(t)$ eine

- zur x–Achse parallele Tangente, in denen der Tangentialvektor $f'(t)$ von f und der Richtungsvektor $(1, 0)$ der x–Achse linear abhängig sind; wegen

$$3\,t^2 - 1 = 0 \iff t^2 = \frac{1}{3} \iff t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ist dies in

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \quad \text{mit} \quad f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\ 0\right)$$

und

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \quad \text{mit} \quad f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}};\ 0\right)$$

der Fall.

- zur y–Achse parallele Tangente, in denen der Tangentialvektor $f'(t)$ von f und der Richtungsvektor $(0,1)$ der y–Achse linear abhängig sind; wegen

$$2\,t = 0 \iff t = 0$$

  ist dies in

$$f(0) = (-1;\ 0) \quad \text{mit} \quad f'(0) = (0; -1)$$

  der Fall.

b) Für einen Doppelpunkt $f(a) = f(b)$ mit $a < b$ gilt

$$\big(a^2 - 1,\ a\,(a^2 - 1)\big) = \big(b^2 - 1,\ b\,(b^2 - 1)\big)\,,$$

also

$$a^2 - 1 = b^2 - 1 \implies a^2 = b^2 \implies a = -b,$$

woraus sich wegen $a < b$ schon $a < 0 < b$ ergibt, sowie

$$a\,(a^2 - 1) = b\,(b^2 - 1) \implies -b\,(b^2 - 1) = b\,(b^2 - 1)\,,$$

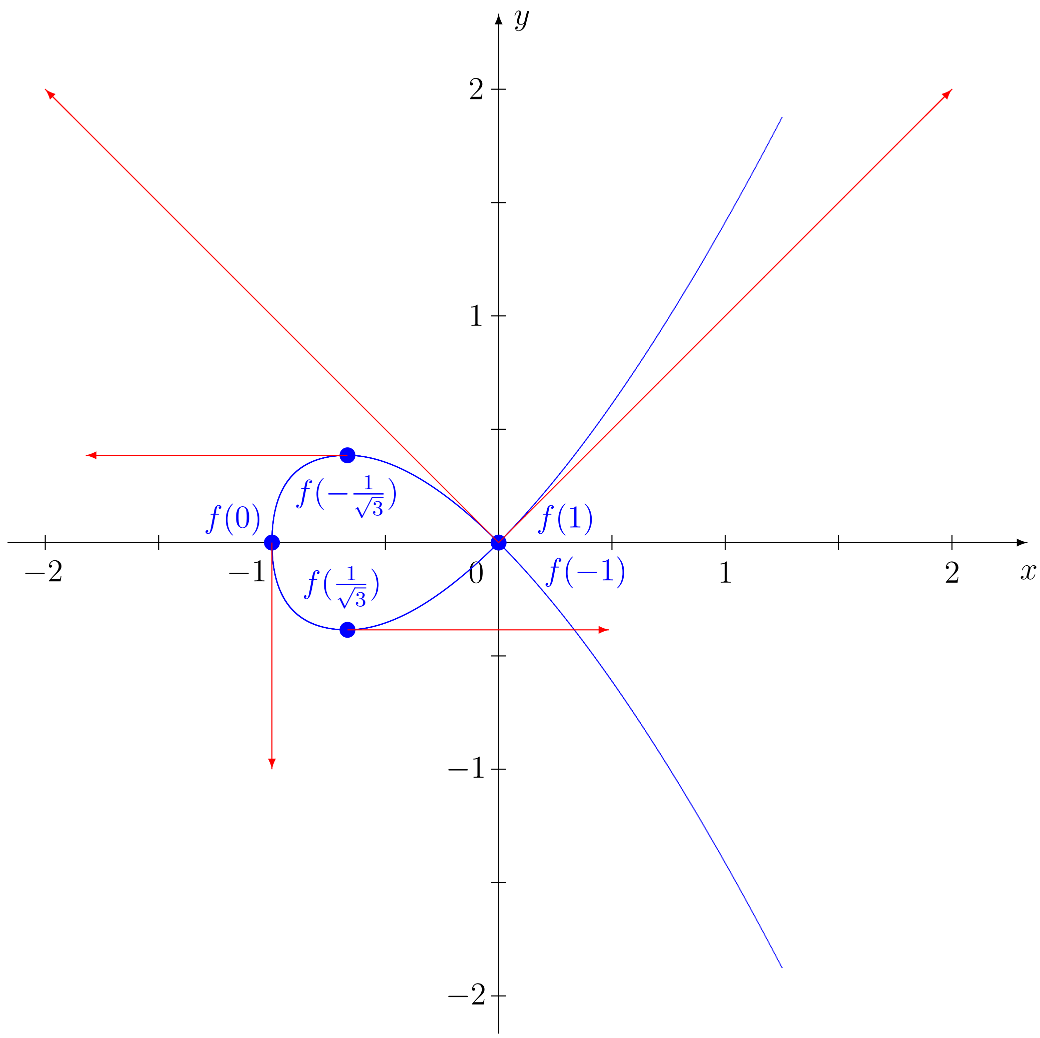
woraus sich dann $b\,(b^2 - 1) = 0$, wegen $b > 0$ also $b = 1$ und $a = -1$ ergibt. Folglich besitzt die Kurve f genau den Doppelpunkt

$$f(-1) = (0; 0) = f(1),$$

und für die beiden Tangentialvektoren ergibt sich

$$f'(-1) = (-2; 2) \qquad \text{und} \qquad f'(1) = (2; 2).$$

c) Unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse ergibt sich für die Bildmenge K der Kurve f die folgende Skizze:



d) Gemäß a) ist $f(-1) = f(1)$, so daß die (hier ebenfalls mit f bezeichnete) Teilkurve

$$f : [-1;1] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(t^2 - 1,\ t\left(t^2 - 1\right)\right),$$

geschlossen ist; gemäß b) umrandet sie die zu betrachtende Fläche im Gegenuhrzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn. Da diese symmetrisch zur x–Achse liegt, ist nur der im 2. Quadranten gelegene Teil zu betrachten, der von der x–Achse und der Teilkurve

$$f : [-1;0] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

mit

$$\varphi(t) = t^2 - 1 \qquad \text{und} \qquad \psi(t) = t\left(t^2 - 1\right)$$

für alle $t \in [-1;0]$ begrenzt wird. Wegen

$$\varphi'(t) = 2\,t < 0 \qquad \text{für alle} \quad t \in [-1, 0[$$

ist φ auf $[-1, 0]$ streng monoton fallend mit $\varphi(-1) = 0$ und $\varphi(0) = -1$, so daß f den Graphen der Funktion

$$h : [-1;0] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(t)\right),$$

darstellt. Für den gesuchten Flächeninhalt ergibt sich also unter Verwendung der Substitutionsregel $(*)$

$$A = 2 \cdot \int_{-1}^{0} h(x)\,dx = 2 \cdot \int_{\varphi(0)}^{\varphi(-1)} h(x)\,dx \underset{(*)}{=} 2 \int_0^{-1} \underbrace{h(\varphi(t))}_{=\psi(t)} \cdot \varphi'(t)\,dt =$$

$$= 2 \int_0^{-1} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\,dt = 2 \int_0^{-1} t\left(t^2-1\right) \cdot 2\,t\,dt = 4 \int_0^{-1} \left(t^4 - t^2\right) dt =$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_0^{-1} = 4 \cdot \left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

52. a) Die Kurve $K : [0; 2\,\pi] \to \mathbb{R}^2,\ K(t) = (\varphi(t),\ \psi(t)),$ mit

$$\varphi(t) = t - \sin t \qquad \text{und} \qquad \psi(t) = 1 - \cos t$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\varphi'(t) = 1 - \cos t \qquad \text{und} \qquad \psi'(t) = \sin t$$

und damit

$$\|K'(t)\| = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{1 - 2\,\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \underset{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}{=} \sqrt{2\,(1-\cos t)} =$$

$$\underset{1-\cos t = 2\,\sin^2 \frac{t}{2}}{=} \sqrt{4\,\sin^2 \frac{t}{2}} = 2\left|\sin \frac{t}{2}\right| \underset{0 \le \frac{t}{2} \le \pi}{=} 2\,\sin \frac{t}{2}$$

für alle $t \in [0; 2\,\pi]$; folglich ist γ rektifizierbar, und für ihre Länge L gilt

$$L = \int_0^{2\,\pi} \|K'(t)\|\,dt = \int_0^{2\,\pi} 2\,\sin \frac{t}{2}\,dt = \left[2 \cdot \frac{-\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{2\,\pi} =$$

$$= -4 \cdot \left[\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\,\pi} = -4 \cdot (\cos \pi - \cos 0) = -4 \cdot ((-1) - 1) = 8.$$

b) Die erste Koordinatenfunktion

$$\varphi : [0; 2\,\pi] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = t - \sin t,$$

ist wegen $\varphi'(t) = 1 - \cos t > 0$ für alle $t \in]0; 2\pi[$ streng monoton wachsend mit dem Wertebereich $W_x = [\varphi(0); \varphi(2\pi)] = [0; 2\,\pi]$; damit tritt aber jedes $x \in [0; 2\,\pi]$ für genau ein $t \in \mathbb{R}$ auf, nämlich für

$$x = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(x),$$

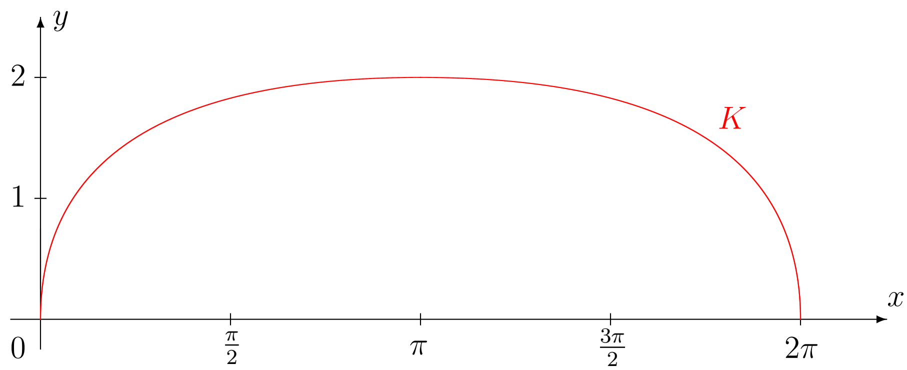
und das dazugehörige $y \in \mathbb{R}$ ist dann

$$y = \psi(t) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Folglich beschreibt die Kurve K den Graphen der Funktion

$$f : [0; 2\,\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right),$$

und es ist $f(\varphi(t)) = \psi(t)$ für alle $t \in [0; 2\,\pi]$.



Für den Inhalt A der Fläche, die von der Kurve und der x–Achse eingeschlossen wird, ergibt sich demnach mit Hilfe der Substitionsregel

$$A = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2\pi)} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt = \int_0^{2\pi} \big(1 - 2\,\cos t + \cos^2 t\big)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\,\cos t + \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt = \left[\frac{3}{2}\,t - 2\,\sin t + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot 2\,\pi - 2\,\underbrace{\sin(2\,\pi)}_{=0} + \underbrace{\frac{\sin(4\,\pi)}{4}}_{=0}\right) - \left(0 - 2\,\underbrace{\sin 0}_{=0} + \underbrace{\frac{\sin 0}{4}}_{=0}\right) = 3\,\pi;$$

dabei geht die für alle $t \in \mathbb{R}$ gültige Beziehung $\cos^2 t = \frac{1}{2}\,(1+\cos(2\,t))$ ein.