

Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

45. Für $x \in \mathbb{R}$ besitzt der Punkt $(x; x^2)$ der gegebenen Parabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ vom Punkt $(0; r)$ den Abstand

$$d(x) = \|(x; x^2) - (0; r)\| = \|(x; x^2 - r)\| = \sqrt{x^2 + (x^2 - r)^2},$$

der aufgrund des Monotonieverhaltens der Quadratwurzel genau dann minimal ist, wenn der Radikand

$$h(x) = x^2 + (x^2 - r)^2$$

minimal ist. Zunächst ist die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2 + (x^2 - r)^2,$$

als Polynomfunktion stetig und differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$h'(x) = 2x + 2(x^2 - r) \cdot 2x = 4x \cdot (x^2 + \frac{1}{2} - r).$$

Wir treffen daher die folgende Fallunterscheidung:

- Für $r \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$h'(x) = 4x \cdot \underbrace{\left(x^2 + \underbrace{\frac{1}{2} - r}_{\geq 0}\right)}_{> 0} \begin{cases} < 0, & \text{für } x < 0, \\ > 0, & \text{für } x > 0; \end{cases}$$

damit ist h auf \mathbb{R}_0^- streng monoton fallend sowie auf \mathbb{R}_0^+ streng monoton steigend und nimmt daher genau für $x = 0$ das globale Minimum an. Folglich ist $(0, 0)$ der Punkt auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kürzesten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$.

- Für $r > \frac{1}{2}$ ist $r - \frac{1}{2} > 0$ mit

$$h'(x) = 4x \cdot (x^2 - (r - \frac{1}{2})) = 4x \left(x - \sqrt{r - \frac{1}{2}}\right) \left(x + \sqrt{r - \frac{1}{2}}\right).$$

Wegen $h'(x) < 0$ für alle $x \in]-\infty; -\sqrt{r - \frac{1}{2}}[\cup]0; \sqrt{r - \frac{1}{2}}[$ ist h auf $]-\infty; -\sqrt{r - \frac{1}{2}}[$ und $]-\infty; -\sqrt{r - \frac{1}{2}}[$ jeweils streng monoton fallend, und wegen $h'(x) > 0$ für alle $x \in]-\sqrt{r - \frac{1}{2}}; 0[\cup]\sqrt{r - \frac{1}{2}}; \infty[$ ist h auf

$\left[-\sqrt{r - \frac{1}{2}}; 0\right]$ und $\left[\sqrt{r - \frac{1}{2}}; \infty\right]$ jeweils streng monoton steigend; daher nimmt h genau für $\pm\sqrt{r - \frac{1}{2}}$ das globale Minimum an. Folglich sind

$$\left(-\sqrt{r - \frac{1}{2}}, r - \frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad \left(\sqrt{r - \frac{1}{2}}, r - \frac{1}{2}\right)$$

die beiden Punkte auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kürzesten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$.

Damit ist $(0, 0)$ genau dann der Punkt auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kleinsten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$, wenn $r \in]0, \frac{1}{2}]$ gilt.

46. a) Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{k}} = 2$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k^2 + 3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{k^2}} = 1$$

gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (2; 1)$; insbesondere ist der Grenzwert $(2; 1)$ auch der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

b) Die beiden Zahlenfolgen

$$(a_{k,1})_{k \in \mathbb{N}_0} = \left(\cos \frac{k\pi}{2}\right)_{k \in \mathbb{N}_0} = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots)$$

und

$$(a_{k,2})_{k \in \mathbb{N}_0} = \left(\sin \frac{k\pi}{2}\right)_{k \in \mathbb{N}_0} = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)$$

divergieren; insbesondere ist auch die Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ divergent. Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt aber

$$a_{4j} = (1; 0), \quad a_{4j+1} = (0; 1), \quad a_{4j+2} = (-1; 0) \quad \text{und} \quad a_{4j+3} = (0; -1);$$

damit besitzt die Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die vier Häufungspunkte $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$ und $(0; -1)$.

c) Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k = e^2$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2k} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)^2 = e^2$$

gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (e^2; e^2)$; insbesondere ist der Grenzwert $(e^2; e^2)$ der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

d) Wegen

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{2j,2} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\sqrt{2j+1}}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{(-1)^{2j}}_{=1} \underbrace{\sqrt{2j}}_{\rightarrow \infty} \right) = \infty$$

besitzt die Folge $(a_{k,2})_{k \in \mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Teilfolge und ist demnach insbesondere divergent; folglich divergiert auch die Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

und

$$\begin{aligned} a_{2j-1,2} &= \sqrt{2j} + (-1)^{2j-1} \sqrt{2j-1} = \sqrt{2j} - \sqrt{2j-1} = \\ &= \frac{\sqrt{2j}^2 - \sqrt{2j-1}^2}{\sqrt{2j} + \sqrt{2j-1}} = \frac{2j - (2j-1)}{\sqrt{2j} + \sqrt{2j-1}} = \frac{1}{\sqrt{2j} + \sqrt{2j-1}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

besitzt $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die gegen $(1; 0)$ konvergente Teilfolge $(a_{2j-1})_{j \in \mathbb{N}}$; folglich ist $(1; 0)$ ein Häufungspunkt der Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

47. Die Kurve

$$\gamma : \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (3t^2 - 1, 3t^3 - t),$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\gamma'(t) = (6t, 9t^2 - 1)$$

und damit

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(6t)^2 + (9t^2 - 1)^2} = \sqrt{36t^2 + 81t^4 - 18t^2 + 1} = \\ &= \sqrt{81t^4 + 18t^2 + 1} = \sqrt{(9t^2 + 1)^2} = 9t^2 + 1 \end{aligned}$$

für alle $t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$; folglich ist γ rektifizierbar, und für ihre Länge L gilt

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (9t^2 + 1) dt = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (9t^2 + 1) dt = \\ &= 2 \cdot [3t^3 + t]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

48. a) Die gegebene Kurve

$$f : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t),$$

besitzt die beiden stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen

$$f_1 : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(t) = (1 - \cos t) \cdot \cos t,$$

mit

$$f_1'(t) = \sin t \cdot \cos t + (1 - \cos t) \cdot (-\sin t)$$

für alle $t \in [0; 2\pi]$ und

$$f_2 : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(t) = (1 - \cos t) \cdot \sin t,$$

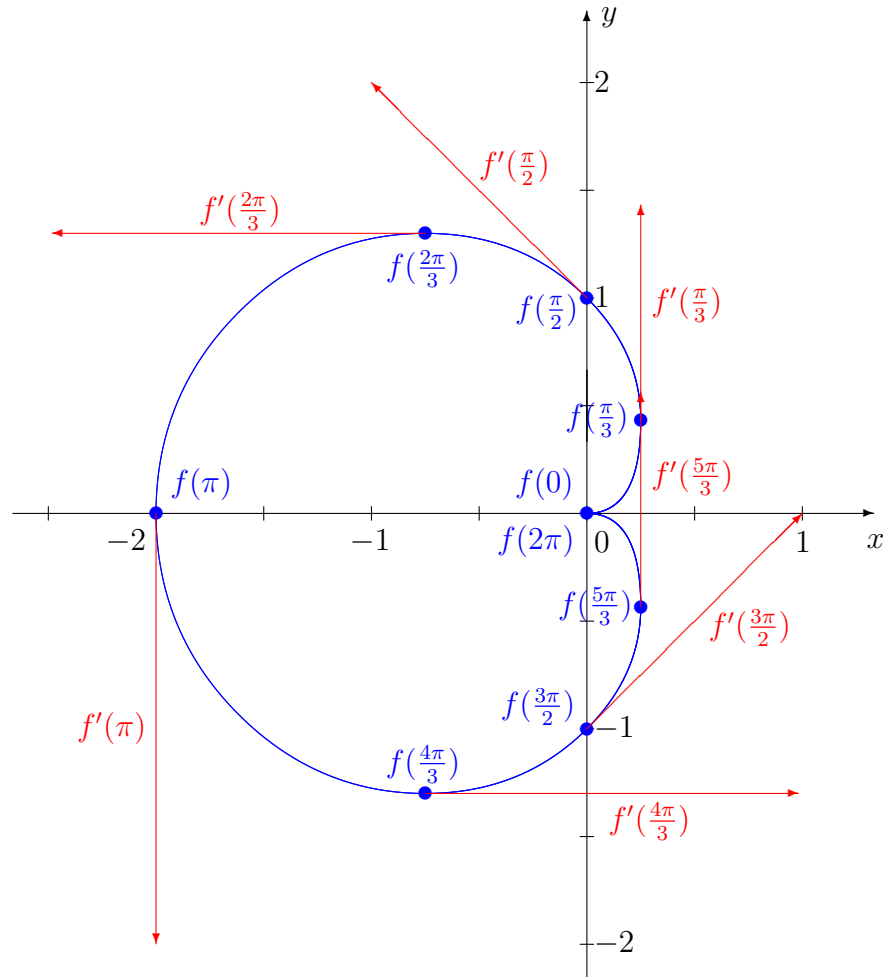
mit

$$f'_2(t) = \sin t \cdot \sin t + (1 - \cos t) \cdot \cos t$$

für alle $t \in [0; 2\pi]$; folglich ist f eine stetig differenzierbare Kurve, und für alle $t \in [0; 2\pi]$ gilt $f'(t) = (f'_1(t); f'_2(t))$. Damit ergibt sich

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f(t)$	$(0, 0)$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\sqrt{3})$	$(0, 1)$	$(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{3})$	$(-2, 0)$
$f'(t)$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(-1, 1)$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, -2)$
t	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	
$f(t)$	$(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\sqrt{3})$	$(0, -1)$	$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\sqrt{3})$	$(0, 0)$	
$f'(t)$	$(\sqrt{3}, 0)$	$(1, 1)$	$(0, 1)$	$(0, 0)$	

- b) Wir tragen zunächst die neun in a) berechneten Kurvenpunkte $f(t)$ samt den zugehörigen Tangentialvektoren $f'(t)$ für $t \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$ in das Koordinatensystem ein und skizzieren dann unter Berücksichtigung dieser Informationen die *Kardioide (Herzkurve)* genannte Kurve f .



c) Für alle $t \in [0; 2\pi]$ gilt

$$\begin{aligned}
 \|f'(t)\|^2 &= f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 = \\
 &= (\sin t \cos t - (1 - \cos t) \sin t)^2 + (\sin t \sin t + (1 - \cos t) \cos t)^2 = \\
 &= (\sin^2 t \cos^2 t - 2 \sin^2 t \cos t (1 - \cos t) + (1 - \cos t)^2 \sin^2 t) + \\
 &+ (\sin^2 t \sin^2 t + 2 \sin^2 t \cos t (1 - \cos t) + (1 - \cos t)^2 \cos^2 t) = \\
 &= \sin^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} + (1 - \cos t)^2 \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1} = \\
 &= \sin^2 t + (1 - \cos t)^2 = \sin^2 t + (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) = \\
 &= 1 - 2 \cos t + \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \frac{t}{2}
 \end{aligned}$$

und folglich wegen $\frac{t}{2} \in [0; \pi]$ und damit $\sin \frac{t}{2} \geq 0$ schließlich

$$\|f'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2 \sin \frac{t}{2}.$$

Die stetig differenzierbare Kurve f ist insbesondere rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge L gilt

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[\frac{2(-\cos \frac{t}{2})}{\frac{1}{2}} \right]_0^{2\pi} = \\
 &= (-4 \cdot \underbrace{\cos \pi}_{=-1}) - (-4 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1}) = 4 - (-4) = 8.
 \end{aligned}$$