Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

41. a) Die gegebene Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}\, x^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten $c_n = \frac{n+1}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{n+2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n+1}\right| = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$
$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1+0}{1+0} \cdot 0 = 0 = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = +\infty$.

b) Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}\, x^n,$$

auf dem offenen Konvergenzintervall $D = \mathbb{R}$ stetig und damit insbesondere integrierbar, wobei die gliedweise integrierte Potenzreihe die Stammfunktion F von f mit $F(0) = 0$ darstellt; für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt demnach

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} =$$
$$= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right) = x\,(e^x - 1)\,;$$

dabei geht die auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ ein.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt gemäß b)

$$F(x) = x\,(e^x - 1)$$

und damit

$$f(x) = F'(x) = 1 \cdot (e^x - 1) + x \cdot e^x = x\,e^x + e^x - 1.$$

42. Da die Integrandenfunktion

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^3},$$

(als gebrochenrationale Funktion) stetig ist, ist die Integralfunktion

$$F :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3},$$

nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung differenzierbar, und für alle $x \in]-1,1[$ gilt

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)},$$

woraus sich wegen $|-x^3| = |x|^3 < 1$ unter Verwendung der Summenformel für geometrische Reihen dann

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$$

ergibt. Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen stellt damit die gliedweise integrierte Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\, x^{3n+1}$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ auf dem Konvergenzintervall $]-1,1[$ eine Stammfunktion von F' dar, es gibt also eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\, x^{3n+1} + c$$

für alle $x \in]-1,1[$. Speziell für den Entwicklungspunkt $x = 0$ ergibt sich

$$F(0) = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^3} = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\, 0^{3n+1} = 0,$$

so daß man $c = 0$ und damit schließlich

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\, x^{3n+1}$$

für alle $x \in]-1,1[$ erhält.

43. a) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(x^2\right).$$

Die Exponentialreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z),$$

so daß sich

$$f(x) = \exp\left(x^2\right) \underset{z=x^2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^{2k}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt; dies ist eine Potenzreihendarstellung von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und stimmt damit mit der Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ überein.

b) Gemäß Teilaufgabe a) wird die Funktion f durch die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{mit} \quad c_n = \begin{cases} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(\frac{n}{2})!}, & \text{für } n = 2k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{für } n = 2k+1 \text{ ungerade,} \end{cases}$$

gegeben; nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ergibt sich damit

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot c_n = \begin{cases} \frac{n!}{(\frac{n}{2})!}, & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

44. a) Zunächst ist die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^x}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ \alpha & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

unabhängig von der Wahl des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ zumindest in allen Punkten $a \neq 0$ (als Quotient zweier stetiger Funktionen) stetig. Für den Punkt $a = 0$ ergibt sich über die Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^x}{x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{-e^x}{1} \underset{\exp \text{ stetig}}{=} -e^0 = -1;$$

folglich ist f genau dann im Punkt $a = 0$ stetig und damit eine stetige Funktion, wenn $\alpha = f(0) = -1$ gilt.

b) Mit Hilfe der Exponentialreihe ergibt sich zunächst für alle $x \neq 0$ die Potenzreihendarstellung

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{x} \cdot \left(1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)!}\, x^n;$$

diese ist wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)!}\, 0^n = \frac{-1}{(0+1)!}\, 0^0 = -1 = f(0)$$

auch für den Punkt $x = 0$ gültig. Damit stellt die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)!}\, x^n$$

auf ganz $\mathbb{R}$ die Funktion f dar; diese ist damit nach dem Hauptsatz über Potenzreihen beliebig oft differenzierbar mit

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot c_n = n! \cdot \frac{-1}{(n+1)!} = -\frac{1}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.