

**Tutorium zur Vorlesung
„Differential- und Integralrechnung II“
— Bearbeitungsvorschlag —**

33. a) Bei der gegebenen Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

handelt es sich wegen

$$\frac{x^{2n}}{3^n} = \frac{(x^2)^n}{3^n} = \left(\frac{x^2}{3}\right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ um die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{mit} \quad q = \frac{x^2}{3};$$

diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ gilt, wegen

$$|q| < 1 \iff \left|\frac{x^2}{3}\right| < 1 \iff \frac{x^2}{3} < 1 \iff x^2 < 3 \iff |x| < \sqrt{3}$$

also genau für $x \in]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$.

b) Gemäß der Summenformel für geometrische Reihen gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für alle} \quad |q| < 1,$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3}} = \frac{3}{3 - x^2} \quad \text{für alle} \quad x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[;$$

damit wird die rationale Funktion

$$f :]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{3 - x^2},$$

durch die Potenzreihe auf ihrem Konvergenzbereich dargestellt.

34. a) Die gegebene Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten

$$c_n = \frac{n!}{n^n} \neq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \left| \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \right| = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} = \\ &= (n+1) \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} = c \end{aligned}$$

besitzt die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = e$.

- b) Die gegebene Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^4+3n^2+n} x^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten

$$c_n = e^{-n^4+3n^2+n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|c_n|} &= \sqrt[n]{|e^{-n^4+3n^2+n}|} = \left(e^{-n^4+3n^2+n} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{(-n^4+3n^2+n) \cdot \frac{1}{n}} = \\ &= \exp(-n^3 + 3n + 1) = \exp\left(\underbrace{-n(n^2 - 3)}_{\rightarrow +\infty} + 1\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

besitzt die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = +\infty$.

35. Zu betrachten ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ mit dem Entwicklungspunkt 0 und den Koeffizienten $c_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t+1)}{\ln(t)} \stackrel{\text{L'H}}{\underset{,\infty/\infty,}{=}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t+1}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}} \stackrel{\sqrt{\cdot} \text{ stetig}}{=} \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1,$$

insgesamt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{\rightarrow 1} \right) = 1 = c,$$

besitzt die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} x^n$ den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 1$. Damit ist diese für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ absolut konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent, weswegen noch der Fall $|x| = 1$ gesondert zu behandeln ist.

- Im Falle $x = 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ zu betrachten; wegen

$$c_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{\ln(n) \geq 1}{\geq} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle } n \geq 3$$

besitzt die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ als divergente Minorante und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent, weswegen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ divergiert.

- Im Falle $x = -1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n$ zu betrachten; wir verwenden hierfür die Hilfsfunktion

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}.$$

Wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{t}} = 0$$

ist $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, und wegen

$$f'(t) = \frac{\sqrt{t} \cdot \frac{1}{t} - \ln(t) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}}{(\sqrt{t})^2} = \frac{2 - \ln(t)}{2(\sqrt{t})^3} < 0 \quad \text{für alle } t > e^2$$

ist $(c_n)_{n \geq 8}$ monoton fallend; damit ist nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die alternierende Reihe $\sum_{n=8}^{\infty} (-1)^n c_n = \sum_{n=8}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} (-1)^n$ konvergent,

weswegen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} (-1)^n$ konvergiert.

Damit konvergiert die gegebene Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} x^n$ genau für $x \in [-1; 1[$.

36. a) Die Funktion

$$f :]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x,$$

ist beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f''(x) = (-1) \cdot x^{-2}, \quad f'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3},$$

$$f^{(4)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4} \quad \text{usw.}$$

weswegen die Vermutung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nahelegt; wir weisen dies mit vollständiger Induktion nach:

„ $n = 1$ “:

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = (-1)^0 \cdot 0! \cdot x^{-1}.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = ((-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n})' = \\ &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot ((-n) \cdot x^{-n-1}) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Wegen

$$f(2) = \ln 2 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{2^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ergibt sich für die Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 2$

$$\begin{aligned} T_f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = f(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{2^n \cdot n!} (x-2)^n = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x-2)^n \end{aligned}$$

für alle $x \in]0, \infty[$.

b) Bei der in a) bestimmten Taylorreihe $T_f(x)$ handelt es sich um eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $a = 2$ mit den Koeffizienten

$$c_0 = \ln 2 \quad \text{und} \quad c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n}{2^{n+1} \cdot (n+1) \cdot (-1)^{n-1}} \right| = \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2(1 + \frac{1}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = c$$

ergibt sich für den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 2$; damit ist die Potenzreihe konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 2| < 2$, also für alle $x \in]0, 4[$, und

divergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 2| > 2$, also für alle $x \in]-\infty, 0[\cup]4, \infty[$.
Für $x = 0$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x - 2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

als (negative) harmonische Reihe divergent, und für $x = 4$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x - 2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

als alternierende harmonische Reihe konvergent. Insgesamt konvergiert also die Taylorreihe $T_f(x)$ genau für alle $x \in]0, 4]$.