MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 8
02.07.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

29. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, ist als Verkettung des Cosinus und einer linearen Funktion beliebig oft differenzierbar; mit der Kettenregel erhält man

- $f'(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,
- $f''(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ und
- $f'''(x) = -\left(-\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot 1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(0) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f'(0) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad f''(0) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ergibt sich für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Taylorformel gilt nun $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere also $f(1) = T_2(1) + R_3(1)$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen $a = 0$ und $x = 1$ mit

$$R_3(1) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot 1^3 = \frac{1}{6}\,f'''(\xi) = \frac{1}{6}\,\sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)$$

gibt; damit ergibt sich aber

$$\left|\cos\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - T_2(1)\right| = |f(1) - T_2(1)| = |R_3(1)| = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)\right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{6}.$$

30. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (\pi - x) \cdot \cos x,$$

ist als Produkt einer linearen Funktion und des Cosinus beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\cdot\cos x + (\pi - x)\cdot(-\sin x) \\ &= -\cos x + (x-\pi)\cdot\sin x, \\ f''(x) &= -(-\sin x) + (1\cdot\sin x + (x-\pi)\cdot\cos x) \\ &= 2\,\sin x + (x-\pi)\cdot\cos x, \\ f'''(x) &= 2\,\cos x + (1\cdot\cos x + (x-\pi)\cdot(-\sin x)) \\ &= 3\,\cos x + (\pi - x)\cdot\sin x. \end{aligned}$$

b) Im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$ mit $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ gilt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0, \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)\cdot\sin\frac{\pi}{2} &= 0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 = -\frac{\pi}{2}, \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\sin\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)\cdot\cos\frac{\pi}{2} &= 2\cdot 1 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 0 = 2, \end{aligned}$$

und für das Taylorpolynom T_2 von f ergibt sich damit

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\,f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \;=\; x^2 - \frac{3\pi}{2}\,x + \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$ und x mit

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

gibt; für jedes $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ aus dem symmetrisch zum Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$ liegenden Intervall $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ gilt $\left|x - \frac{\pi}{2}\right| \le \frac{\pi}{4}$, und die Stelle ξ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und x befindet sich ebenfalls im Intervall $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |f'''(\xi)| &= |3\,\cos\xi + (\pi - \xi)\cdot\sin\xi| \le |3\,\cos\xi| + |(\pi - \xi)\cdot\sin\xi| = \\ &= 3\cdot\underbrace{|\cos\xi|}_{\le 1} + \Big|\underbrace{\pi - \xi}_{\ge\frac{\pi}{4}>0}\Big|\cdot\underbrace{|\sin\xi|}_{\le 1} \le 3\cdot 1 + \underbrace{(\pi - \xi)}_{\le\frac{3\pi}{4}\le 3}\cdot 1 \le 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

und folglich die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| &= \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right| = \\ &= \frac{1}{6}\cdot\underbrace{|f'''(\xi)|}_{\le 6}\cdot\underbrace{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^3}_{\le(\frac{\pi}{4})^3} \le \frac{1}{6}\cdot 6\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{\pi^3}{64}. \end{aligned}$$

31. Die Funktion

$$f : [-1; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x},$$

ist auf $]-1; \infty[$ beliebig oft stetig differenzierbar, und für alle $x > -1$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}}\,, \\
f'(x) &= \frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\,, \\
f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\,, \\
f'''(x) &= -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\,(1+x)^{-\frac{5}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4},$$

und man erhält für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

für alle $x \in [-1; \infty[$. Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in [-1; \infty[$, wobei es zu jedem $x > -1$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung ein ξ_x zwischen $a = 0$ und x mit $R_3(x) = \dfrac{f'''(\xi_x)}{3!}x^3$ gibt.

a) Für $x \to 0$ ist auch $\xi_x \to 0$ und damit wegen der Stetigkeit der dritten Ableitung f''' von f auch $f'''(\xi_x) \to f'''(0) = \frac{3}{8}$, so daß sich insgesamt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}\,(f(x) - T_2(x)) = \frac{1}{x^2} \cdot R_3(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{f'''(\xi_x)}{3!}x^3 &= \\
= \frac{1}{6} \cdot \underbrace{f'''(\xi_x)}_{\to \frac{3}{8}} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \;\xrightarrow[x \to 0]{}\; \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

ergibt; wir können daher $p_2 = T_2$ wählen.

b) Für $x \in [0; \infty[$ ist auch $\xi_x \in [0; \infty[$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
|f(x) - p_2(x)| \underset{p_2 = T_2}{=} |f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi_x)}{3!}x^3\right| &= \\
= \frac{1}{6} \cdot |f'''(\xi_x)| \cdot |x|^3 \underset{x \geq 0}{=} \frac{1}{6} \cdot \left|\frac{3}{8}\,(1+\xi_x)^{-\frac{5}{2}}\right| \cdot x^3 \underset{1+\xi_x \geq 1}{\leq} \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8}x^3 = \frac{1}{16}x^3.
\end{aligned}$$

32. a) Die zu betrachtende Funktion

$$f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x\,e^x - e^{-x},$$

ist als Differenz und Produkt einer linearen Funktion und der Exponentialfunktion differenzierbar, und für alle $x > -1$ gilt

$$f'(x) = (1 \cdot e^x + x \cdot e^x) - e^{-x} \cdot (-1) = \underbrace{(1+x)}_{>0} \cdot \underbrace{e^x}_{>0} + \underbrace{e^{-x}}_{>0} > 0;$$

damit ist f streng monoton steigend, insbesondere umkehrbar, und die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$ ist wegen $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \,]-1, \infty[$ differenzierbar.

b) Für $a = 0$ ist $a \in \,]-1, \infty[$ mit

$$b = f(a) = 0 \cdot e^0 - e^{-0} = -1, \qquad \text{also} \qquad g(-1) = f^{-1}(b) = a = 0,$$

und für die Ableitung der Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ ergibt sich

$$g'(-1) = \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{(1+0) \cdot e^0 + e^{-0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Für das Taylorpolynom ersten Grades T_1 von g um den Entwicklungspunkt $b = -1$ gilt demnach

$$\begin{aligned} T_1(x) = g(b) + g'(b) \cdot (x - b) = \\ = g(-1) + g'(-1) \cdot (x - (-1)) = \\ = 0 + \frac{1}{2} \cdot (x + 1) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$