MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 7
25.06.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

25. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin^3 t = \sin^2 t \cdot \sin t = \big(1 - \cos^2 t\big) \cdot \sin t = \big(\cos^2 t - 1\big) \cdot (-\sin t),$$

so daß sich mit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1,$$

und der Substition

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) = \cos t, \qquad \text{mit} \qquad g'(t) = -\sin t$$

dann

$$\int \sin^3 t\, dt = \int \big(\cos^2 t - 1\big) \cdot (-\sin t)\, dt = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt =$$
$$= \int f(x)\, dx = \int \big(x^2 - 1\big)\, dx = \frac{x^3}{3} - x + C = \frac{\cos^3 t}{3} - \cos t + C$$

ergibt. Des weiteren ist

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \sin\sqrt{t}\, dt = \int_{\pi^2}^{4\pi^2} 2\sqrt{t}\sin\sqrt{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt;$$

die Substitionsregel liefert für

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\,x\,\sin x,$$

sowie

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(t) = \sqrt{t}, \qquad \text{mit} \quad g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

für alle $t \in \mathbb{R}^+$ damit

$$\begin{aligned}
\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \sin\sqrt{t}\,dt &= \int_{\pi^2}^{4\pi^2} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = \int_{g(\pi^2)}^{g(4\pi^2)} f(x)\,dx \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} 2\,x \cdot \sin x\,dx = 2 \cdot \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'(x)}\,dx \\
&= 2 \cdot \left(\left[\underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} \right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)}\,dx \right) \\
&= 2 \cdot \left(\left[2\pi \cdot (-\underbrace{\cos 2\pi}_{=1}) - \pi \cdot (-\underbrace{\cos \pi}_{=-1}) \right] + \int_{\pi}^{2\pi} \cos x\,dx \right) \\
&= 2 \cdot \left(\left[-2\pi - \pi \right] + \left[\sin x \right]_{\pi}^{2\pi} \right) \\
&= 2 \cdot \left(-3\pi + \left[\underbrace{\sin 2\pi}_{=0} - \underbrace{\sin \pi}_{=0} \right] \right) = -6\,\pi.
\end{aligned}$$

26. Wir versuchen, eine Stammfunktion zu

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \cdot \ln x,$$

mittels partieller Integration mit $u'(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ und $v(x) = \ln x$ zu ermitteln; für die dazu notwendige Bestimmung von $u(x)$ verwenden wir die Substitution $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(t) = 1 + t^2$, mit $g'(t) = 2\,t$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$ und erhalten mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
\int u'(t)\,dt = \int \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(g(t))^2} \cdot g'(t)\,dt = \\
= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right) + C = -\frac{1}{2(1+t^2)} + C.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx = \int \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^2}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} = \\
= \underbrace{-\frac{1}{2(1+x^2)}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int \underbrace{-\frac{1}{2(1+x^2)}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx = \\
= -\frac{\ln x}{2\,(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1+x^2) \cdot x}\,dx.
\end{aligned}$$

Das nun entstandene Integral behandeln wir mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(1+x^2)\,x} = \frac{\alpha\,x + \beta}{1+x^2} + \frac{\gamma}{x}$$

mit geeigneten Konstanten α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$; wegen

$$\frac{\alpha\,x+\beta}{1+x^2}+\frac{\gamma}{x}=\frac{(\alpha\,x+\beta)\,x+\gamma\,(1+x^2)}{(1+x)^2\,x}=\frac{(\alpha+\gamma)\,x^2+\beta\,x+\gamma}{(1+x)^2\,x}$$

liefert der Koeffizientenvergleich $\alpha+\gamma=0$, $\beta=0$ und $\gamma=1$, also $\alpha=-1$. Damit ergibt sich

$$\int\frac{1}{(1+x^2)\cdot x}\,dx=\int\left(\frac{-x}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{1}{2}\int\frac{2\,x}{1+x^2}\,dx+\int\frac{1}{x}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+\ln|x|+C=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln x+C$$

sowie insgesamt

$$\int f(x)\,dx=-\frac{\ln x}{2\,(1+x^2)}-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln x+C.$$

Damit ist etwa

$$F:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\quad F(x)=-\frac{\ln x}{2\,(1+x^2)}-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln x$$

eine Stammfunktion von f.

27. a) Die Funktion

$$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+a}}=x^{-\frac{1}{2}}-(x+a)^{-\frac{1}{2}},$$

ist differenzierbar mit

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}-(-\frac{1}{2})\cdot(x+a)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+a}^3}-\frac{1}{\sqrt{x}^3}\right)<0$$

für alle $x>0$; folglich ist f streng monoton fallend. Für das Verhalten von f am Rande des Definitionsbereichs ergibt sich

$$f(x)=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\to\infty}-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+a}}}_{\to\frac{1}{\sqrt{a}}}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\infty\quad\text{und}\quad f(x)=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+a}}}_{\to 0}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

b) Es ist

$$F:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\quad F(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{(x+a)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+a}\right)$$

eine Stammfunktion von f.

c) Wir untersuchen zunächst die beiden uneigentlichen Integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ und $\int_1^\infty f(x)\,dx$ jeweils auf Konvergenz:

- Für alle $0 < \alpha < 1$ gilt

$$\int_\alpha^1 f(x)\,dx = F(1) - F(\alpha) = F(1) - 2\big(\underbrace{\sqrt{\alpha}}_{\to\sqrt{0}} - \underbrace{\sqrt{\alpha+a}}_{\to\sqrt{0+a}}\big) \underset{\alpha\to 0+}{\longrightarrow}$$
$$\longrightarrow F(1) - 2\left(0 - \sqrt{a}\right) = F(1) + 2\sqrt{a};$$

damit konvergiert das uneigentliche Integral 2. Art $\int_0^1 f(x)\,dx$, und sein Wert ist $\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) + 2\sqrt{a}$.

- Für alle $1 < \beta$ gilt

$$\int_1^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(1) = 2\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta+a}\right) - F(1) =$$
$$= 2 \cdot \frac{\beta - (\beta+a)}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta+a}} - F(1) = -\underbrace{\frac{2\,a}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta+a}}}_{\to 0} - F(1) \underset{\beta\to\infty}{\longrightarrow} -F(1);$$

damit konvergiert das uneigentliche Integral 1. Art $\int_1^\infty f(x)\,dx$, und sein Wert ist $\int_1^\infty f(x)\,dx = -F(1)$.

Folglich konvergiert das zu untersuchende uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$, und für seinen Wert gilt

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx = \left(F(1) + 2\sqrt{a}\right) - F(1) = 2\sqrt{a}.$$

28. Wir bestimmen das Konvergenzverhalten der gegebenen Reihen

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\,\ln n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$$

mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums und betrachten dazu die beiden Funktionen

$$f : [2;\infty[\; \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x\,\ln x},$$

und

$$g : [2;\infty[\; \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}\,\ln x.$$

- Für alle $2 \le x_1 \le x_2$ ist $0 < \ln 2 \le \ln x_1 \le \ln x_2$ und damit

$$0 < x_1\,\ln x_1 \le x_2\,\ln x_2 \quad \text{sowie} \quad f(x_1) = \frac{1}{x_1\,\ln x_1} \ge \frac{1}{x_2\,\ln x_2} = f(x_2),$$

weswegen f monoton fallend ist; ferner gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2$. Wegen

$$\int_2^b f(x)\,dx = \int_2^b \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = [\ln|\ln x|]_2^b = \underbrace{\ln|\ln b|}_{\to\infty} - \ln(\ln 2) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} \infty;$$

ist das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx$ nicht konvergent, so daß auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty f(n)$, also $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\,\ln n}$, divergiert.

- Die Funktion g ist als Produkt einer Potenzfunktion und des Logarithmus differenzierbar, und es gilt

$$g'(x) = -\frac{3}{2}\,x^{-\frac{5}{2}} \cdot \ln x + x^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \left(1 - \frac{3}{2}\,\ln x\right) \cdot x^{-\frac{5}{2}} \leq 0$$

für alle $x \geq 2$, weswegen g monoton fallend ist; ferner gilt $g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2$. Mit Hilfe der in der Vorlesung (durch partielle Integration) ermittelten Stammfunktion

$$G : [2,\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2}\,((r+1)\,\ln x - 1) \underset{r=-\frac{3}{2}}{=} -\frac{2\,(2+\ln x)}{\sqrt{x}},$$

erhält man

$$\int_2^b g(x)\,dx = \left[-\frac{2\,(2+\ln x)}{\sqrt{x}}\right]_2^b = -\frac{2\,(2+\ln b)}{\sqrt{b}} + \sqrt{2}\,(2+\ln 2)\,;$$

nach der Regel von de l'Hospital gilt

$$\lim_{b\to\infty} \frac{2\,(2+\ln b)}{\sqrt{b}} = \lim_{b\to\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{b}}{\frac{1}{2\sqrt{b}}} = \lim_{b\to\infty} \frac{4\sqrt{b}}{b} = \lim_{b\to\infty} \frac{4}{\sqrt{b}} = 0$$

und damit

$$\int_2^\infty g(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b g(x)\,dx = \sqrt{2}\,(2+\ln 2)\,.$$

Folglich ist das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty g(x)\,dx$ konvergent, so daß auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty g(n)$, also $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n\,\sqrt{n}}$, konvergiert.