MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 6
18.06.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

21. a) Die Funktion

$$F : D \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \sqrt{g(x)},$$

ist als Hintereinanderausführung der beiden stetig differenzierbaren Funktionen

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sqrt{x}, \qquad \text{und} \qquad g : D \to \mathbb{R}$$

selbst stetig differenzierbar; nach der Kettenregel gilt dabei

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

für alle $x \in D$; nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist damit F eine Stammfunktion von $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$, und wir erhalten

$$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\,dx = 2\int f(x)\,dx = 2\,F(x) + C = 2\sqrt{g(x)} + C.$$

b) Wir wenden jeweils die in a) entwickelte Integrationsregel an:

- Für $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = 1 + e^x$, mit $g_1'(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = \int \frac{g_1'(x)}{\sqrt{g_1(x)}}\,dx = 2\sqrt{g_1(x)} + C = 2\sqrt{1+e^x} + C.$$

- Für $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2(x) = 1 + x^2$, mit $g_2'(x) = 2\,x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{g_2'(x)}{\sqrt{g_2(x)}}\,dx = \sqrt{g_2(x)} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

- Für $g_3 : \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}$, $g_3(x) = 1-x^2$, mit $g_3'(x) = -2\,x$ für alle $x \in \left]-1,1\right[$ erhalten wir schließlich

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{g_3'(x)}{\sqrt{g_3(x)}}\,dx = -\sqrt{g_3(x)} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

c) Die Funktion arcsin ist zwar auf $[-1,1]$ definiert und dort stetig, aber nur auf dem offenen Intervall $]-1,1[$ stetig differenzierbar; daher bestimmen wir die Stammfunktionen von arcsin zunächst nur auf der Definitionsmenge $]-1,1[$.

$$\int \arcsin x\, dx = \int \underbrace{1}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{u(x)}\, dx =$$

$$= \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{u(x)} - \int \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{u'(x)}\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \underset{\text{b)}}{=}$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Aufgrund der Stetigkeit dieser Funktionen auf ganz $[-1,1]$ (also insbesondere auch in den Punkten $a=-1$ und $b=1$) ist diese Beziehung sogar auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1,1]$ gültig.

22. a) Wir bestimmen $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2} = \frac{1}{(x+1)\,(x+2)}$$

für alle $x \in [0;1]$. Wegen

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2} = \frac{\alpha\,(x+2) + \beta\,(x+1)}{(x+1)\,(x+2)} = \frac{(\alpha+\beta)\,x + (2\,\alpha+\beta)}{(x+1)\,(x+2)}$$

liefert der Koeffizientenvergleich $\alpha+\beta=0$ und $2\,\alpha+\beta=1$, also $\alpha=1$ und $\beta=-1$. Damit ergibt sich

$$\int \frac{1}{(x+1)\,(x+2)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{x+1}\, dx - \int \frac{1}{x+2}\, dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

und damit

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\,(x+2)}\, dx = \left[\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_0^1 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}.$$

b) Mit Hilfe der in a) gezeigten Partialbruchzerlegung ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1;$$

damit ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}$ konvergent, und für ihre Summe gilt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} = 1.$

23. a) Es ist

$$\int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'(x)}\, dx = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)}\, dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

b) Mit Hilfe des in a) ermittelten unbestimmten Integrals ergibt sich mit Hilfe partieller Integration

$$\int_0^\pi \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'(x)}\, dx = \Big[\underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v(x)}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{2\,x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v(x)}\, dx =$$

$$= \Big(\pi^2 \cdot \underbrace{\sin \pi}_{=0} - 0^2 \cdot \sin 0\Big) - 2\int_0^\pi x \sin x\, dx \underset{\text{a)}}{=} -2\Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^\pi =$$

$$= -2\Big[\Big(-\pi \cdot \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + \underbrace{\sin \pi}_{=0}\Big) - \Big(-0 \cdot \cos 0 + \underbrace{\sin 0}_{=0}\Big)\Big] = -2\,\pi.$$

24. Die gegebene Funktion

$$f : \left]-2, \infty\right[\to \mathbb{R}, \quad h(x) = (x-1) \cdot \ln(x+2),$$

besitzt wegen

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x-1)\cdot\ln(x+2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(x-1=0 \ \text{ oder } \ \ln(x+2)=0\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(x-1=0 \ \text{ oder } \ x+2=1\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(x=1 \ \text{ oder } \ x=-1\big) \end{aligned}$$

für alle $x \in \left]-2, \infty\right[$ genau zwei Nullstellen, nämlich $a = -1$ und $b = 1$; dabei verläuft der Graph G_f zwischen den beiden Nullstellen wegen

$$f(x) = \underbrace{(x-1)}_{<0} \cdot \underbrace{\ln \underbrace{(x+2)}_{>1}}_{>\ln 1 = 0} < 0$$

für alle $x \in \left]-1, 1\right[$ unterhalb der x–Achse. Für den gesuchten Inhalt A der vom Graphen G_f und der x–Achse zwischen den beiden Nullstellen $a = -1$ und $b = 1$

eingeschlossenen Fläche gilt damit

$$
\begin{aligned}
A &= \int_a^b (0 - f(x))\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{-(x-1)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x+2)}_{v(x)}\,dx \\
&= \left[\underbrace{-\frac{(x-1)^2}{2}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln(x+2)}_{v(x)}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \underbrace{-\frac{(x-1)^2}{2}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{v'(x)}\,dx \\
&= \left(-\frac{0^2}{2} \cdot \ln 3\right) - \left(-\frac{(-2)^2}{2} \cdot \ln 1\right) + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{(x-1)^2}{x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x+2}\,dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{x\,(x+2) - 4\,(x+2) + 9}{x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(x - 4 + \frac{9}{x+2}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - 4x + 9\ln(x+2)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1^2}{2} - 4 + 9\ln 3\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 4 + 9\ln 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - 4 + 9\ln 3\right) - \left(\frac{1}{2} + 4\right)\right] = \frac{9}{2}\ln 3 - 4.
\end{aligned}
$$