MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 4
04.06.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

13. a) Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = b_n + c_n \qquad \text{für} \quad b_n = \frac{n}{2\,n+1} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{n}{3^n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N};$$

für beide Summanden ergibt sich bei $n \to \infty$ jeweils ein Grenzwert vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“; für die entsprechenden Funktionengrenzwerte erhalten wir mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2\,x+1} \overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{insbesondere also} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2},$$

sowie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{3^x} \overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3^x \ln 3} = 0, \qquad \text{insbesondere also} \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = 0,$$

und insgesamt ergibt sich damit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n + c_n) = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

b) Für die auf ihr Verhalten bei $x \to 2$ zu untersuchende Funktion

$$f : \,]1, +\infty[\,\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{6+5\,x}}{\ln(x-1)},$$

betrachten wir die jeweils differenzierbaren (Zähler– und Nenner–)Funktionen $g : \,]1, +\infty[\,\to \mathbb{R}$ und $h : \,]1, +\infty[\,\to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = x^2 - \sqrt{6+5\,x} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \ln(x-1);$$

dabei ergibt sich

$$g'(x) = 2\,x - \frac{5}{2\sqrt{6+5\,x}} \qquad \text{und} \qquad h'(x) = \frac{1}{x-1} \neq 0$$

für alle $x > 1$, und des weiteren gilt

$$g(x) = x^2 - \sqrt{6+5\,x} \xrightarrow[x\to 2]{\sqrt{\cdot}\ \text{stetig}} 2^2 - \sqrt{6+5\cdot 2} = 4 - \sqrt{16} = 4 - 4 = 0$$

und

$$h(x) = \ln(x-1) \overset{\ln \text{ stetig}}{\underset{x\to 2}{\longrightarrow}} \ln(2-1) = \ln 1 = 0.$$

Da nun der Grenzwert

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{2\,x - \frac{5}{2\sqrt{6+5\,x}}}{\frac{1}{x-1}} \overset{\sqrt{\cdot}\text{ stetig}}{\underset{x\to 2}{\longrightarrow}} \frac{2\cdot 2 - \frac{5}{2\sqrt{6+5\cdot 2}}}{\frac{1}{2-1}} = \frac{4 - \frac{5}{2\sqrt{16}}}{1} = 4 - \frac{5}{8} = \frac{27}{8}$$

existiert, existiert nach der Regel von de l'Hospital auch der Grenzwert von $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ für $x \to 2$, und es gilt

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - \sqrt{6+5\,x}}{\ln(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{27}{8}.$$

14. Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = e^{b \ln a}$ für alle $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die gegebene Funktion

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x};$$

dementsprechend betrachten wir auch die Funktion

$$g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin x \cdot \ln x.$$

a) Wegen

$$\lim_{x\to 0+} \sin x = 0+ \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$$

ist der Grenzwert der Funktion

$$g(x) = \sin x \cdot \ln x \qquad \text{für} \quad x \to 0+$$

vom Typ „$(0+) \cdot (-\infty)$", so daß sich über die Umformung

$$g(x) = \sin x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}} \qquad \text{für} \quad x \to 0+$$

ein Grenzwert vom Typ „$\frac{-\infty}{+\infty}$" ergibt; eine zweifache Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert dann

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} g(x) \quad &= \quad \lim_{x\to 0+} (\sin x \cdot \ln x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}} = \\
&\underset{„\frac{\pm\infty}{\pm\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{(-1)\,(\sin x)^{-2} \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2 x}{-x\cos x} = \\
&\underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{-(\cos x - x\sin x)} = \frac{2\cdot 0\cdot 1}{-(1-0\cdot 0)} = \frac{0}{-1} = 0.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhält man damit

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{g(x)} = e^{\lim_{x\to 0+} g(x)} = e^0 = 1,$$

so daß

$$\widetilde{f} : [0; \infty[\to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} x^{\sin x}, & \text{für } x > 0, \\ 1, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

eine stetige Fortsetzung der gegebenen Funktion f ist.

b) Die gegebene Funktion f ist als Komposition der Exponentialfunktion und der als Produkt des Sinus und des natürlichen Logarithmus differenzierbaren Funktion g selbst differenzierbar, und für alle $x \in]0, +\infty[$ gilt

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right).$$

Wegen

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to 0+} \frac{\cos x}{1} = 1$$

ergibt sich damit

$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} \left(\underbrace{x^{\sin x}}_{\substack{\to 1 \\ \text{a)}}} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\cos x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \right)}_{\to -\infty} \right) = -\infty.$$

c) Wegen der Stetigkeit der Fortsetzung $\widetilde{f}$ im Punkt $a = 0$ ergibt sich

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - 1}{x - 0} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to 0+} \frac{f'(x)}{1} \underset{\text{b)}}{=} -\infty;$$

damit existiert der Differentialquotient von $\widetilde{f}$ im Punkt $a = 0$ nur im uneigentlichen Sinne, mithin ist $\widetilde{f}$ in $a = 0$ nicht differenzierbar.

15. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(x^3) + \arctan x + x^2 - 2$$

ist als Summe und Komposition von Polynomfunktionen, der Exponentialfunktion und des Arcus tangens selbst stetig und differenzierbar; ferner ist

$$f(0) = \exp(0^3) + \arctan 0 + 0^2 - 2 = 1 + 0 + 0 - 2 = -1 < 0.$$

Wegen

$$f(x) = \underbrace{\exp(x^3)}_{\to 0} + \underbrace{\arctan(x)}_{\to -\frac{\pi}{2}} + \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) > 0$, und die stetige Funktion f besitzt nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_1 \in]a, 0[$; wegen

$$f(x) = \underbrace{\exp(x^3)}_{\to +\infty} + \underbrace{\arctan(x)}_{\to \frac{\pi}{2}} + \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) > 0$, und die stetige Funktion f besitzt nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_2 \in]0, b[$. Insgesamt besitzt also f mindestens zwei Nullstellen, nämlich $\xi_1 < 0$ und $\xi_2 > 0$, und folglich nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle $\xi \in]\xi_1, \xi_2[$ der Ableitung.

16. Als reelle Lösungen der gegebenen Gleichung

$$(*) \qquad \sin x = 1 - x$$

kommen wegen $W_{\sin} = [-1, 1]$ nur diejenigen $x \in \mathbb{R}$ mit

$$-1 \leq 1 - x \leq 1, \qquad \text{also} \qquad -2 \leq -x \leq 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 2 \geq x \geq 0,$$

in Frage, und diese stimmen gemäß

$$(*) \qquad \sin x = 1 - x \iff \sin x - (1 - x) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in [0, 2]$$

mit den Nullstellen der Funktion

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x - (1 - x)\,,$$

überein. Als Differenz des Sinus und einer linearen Funktion ist f insbesondere stetig, und es gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= \underbrace{\sin 0}_{=0} - (1 - 0) = -1 < 0 \\ f(2) &= \underbrace{\sin 2}_{>-1} - (1 - 2) > -1 - (-1) = 0; \end{aligned}$$

damit besitzt f nach dem Nullstellensatz (mindestens) eine Nullstelle und folglich die Gleichung $(*)$ auch (mindestens) eine Lösung $\xi \in]0, 2[$. Als Differenz des Sinus und einer linearen Funktion ist f insbesondere auch differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \cos x - (-1) = \cos x + 1 \qquad \text{für alle} \quad x \in [0, 2]\,;$$

da der Cosinus auf $[0, 2]$ streng monoton fällt, gilt

$$f'(x) = \cos x + 1 \geq \underbrace{\cos 2}_{>-1} + 1 > -1 + 1 = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in [0, 2]\,,$$

so daß f eine streng monoton wachsende Funktion ist und damit neben ξ keine weitere Nullstelle besitzen kann. Insgesamt ist also ξ die eindeutig bestimmte reelle Lösung der gegebenen Gleichung $(*)$.