Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

9. Die auf dem maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ zu betrachtende Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{3}{\pi}\arctan\left(e^x\right)\right),$$

ist (als Produkt einer quadratischen Funktion und der Komposition des Logarithmus, des Arcustangens und der Exponentialfunktion) differenzierbar, insbesondere also stetig.

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $e^x > 0$, mit dem Monotonieverhalten des Arcustangens also

$$\arctan\left(e^x\right) > \arctan 0 = 0 \qquad \text{und damit} \qquad \frac{3}{\pi}\arctan\left(e^x\right) > 0,$$

so daß

$$\ln\left(\frac{3}{\pi}\arctan\left(e^x\right)\right) \qquad \text{und damit} \qquad f(x) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{3}{\pi}\arctan\left(e^x\right)\right)$$

definiert ist; folglich ergibt sich $D_f = \mathbb{R}$. Des weiteren gilt für jedes $y \in \mathbb{R}$:

- wegen

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\ln\underbrace{\left(\frac{3}{\pi}\underbrace{\arctan\underbrace{\left(e^x\right)}_{\to 0}}_{\underset{(*)}{\to}\arctan 0 = 0}\right)}_{\to \frac{3}{\pi}\cdot 0 = 0}}_{\to -\infty} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) \leq y$; dabei geht bei $(*)$ die Stetigkeit des Arcustangens an der Stelle 0 ein.

- wegen

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\ln\underbrace{\left(\frac{3}{\pi}\underbrace{\arctan\underbrace{\left(e^x\right)}_{\to +\infty}}_{\to \frac{\pi}{2}}\right)}_{\to \frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}}}_{\underset{(*)}{\to}\ln\frac{3}{2} > 0} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $b > 0$ mit $y \leq f(b)$; dabei geht bei $(*)$ die Stetigkeit des Logarithmus an der Stelle $\frac{3}{2}$ ein.

Der Zwischenwertsatz liefert für die stetige Einschränkung der Funktion f auf das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ wegen $f(a) \leq y \leq f(b)$ ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = y$; damit gilt $y \in W_f$. Als Wertebereich von f ergibt sich demnach $W_f = \mathbb{R}$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 \cdot \ln\left(\frac{3}{\pi}\arctan\left(e^x\right)\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \ln\left(\frac{3}{\pi}\arctan\left(e^x\right)\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{3}{\pi}\arctan\left(e^x\right) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad \arctan\left(e^x\right) = \frac{\pi}{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad e^x = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3; \end{aligned}$$

damit besitzt f genau zwei Nullstellen, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{1}{2}\ln 3 > 0$. Folglich besitzt damit die Ableitung f' der differenzierbaren Funktion f nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle ζ zwischen x_1 und x_2; es ist also $x_1 < \zeta < x_2$, mithin gilt $\zeta \in \,]0, \infty[$.

10. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 - x) \cdot e^x,$$

ist (als Produkt einer linearen Funktion und der Exponentialfunktion) stetig und differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = (-1) \cdot e^x + (1 - x) \cdot e^x = -x \cdot e^x.$$

Wegen

$$f'(x) = \underbrace{-x}_{>0} \cdot \underbrace{e^x}_{>0} > 0$$

für alle $x < 0$ ist f auf $\mathbb{R}_0^-$ streng monoton steigend, und wegen

$$f'(x) = \underbrace{-x}_{<0} \cdot \underbrace{e^x}_{>0} < 0$$

für alle $x > 0$ ist f auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton fallend; damit besitzt f genau ein Extremum, nämlich ein globales Maximum bei

$$x = 0 \quad \text{mit} \quad f(0) = (1 - 0) \cdot e^0 = 1, \qquad \text{also} \qquad H(0; 1).$$

Des weiteren gilt

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\underbrace{(1-x)}_{\to-\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\to+\infty}\Big) = -\infty$$

sowie unter Verwendung der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \big((1-x)\cdot e^x\big) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{e^{-x}} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

b) Gemäß a) besitzt f im Punkte 0 das globale Maximum, es gilt also

$$f(x) \leq f(0) \qquad \text{bzw.} \qquad (1-x)\cdot e^x \leq 1 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für alle $x < 1$ ist $1 - x > 0$, so daß sich nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

ergibt, und für alle $x > 1$ ist $1-x < 0$, so daß sich nach dem Inversionsgesetz

$$e^x \geq \frac{1}{1-x}$$

ergibt; für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt folglich

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \iff x < 1.$$

11. Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion sowie der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus gilt

$$\lim_{x\to0} e^x = e^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to0} e^{-x} = e^{-0} = 1$$

sowie

$$\lim_{x\to0} \sin x = \sin 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to0} \cos x = \cos 0 = 1,$$

so daß eine zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} \overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{0}{0}“}{=}} \lim_{x\to0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{0}{0}“}{=}} \lim_{x\to0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

ergibt. Des weiteren gilt

$$\frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot \left(x \cos\frac{1}{x}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}\cdot\pi)$, so daß wir das Grenzverhalten für $x \to 0$ der beiden Faktoren

$$\frac{x}{\sin x} \qquad \text{und} \qquad \left(x \cos\frac{1}{x}\right)$$

getrennt untersuchen können. Zum einen liefert die Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1,$$

zum anderen ergibt sich wegen

$$\left| x \cos \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \underbrace{\left| \cos \frac{1}{x} \right|}_{\leq 1} \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

unter Verwendung des Schrankenlemmas

$$\lim_{x\to 0} \left(x \cos \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Insgesamt erhält man also

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

12. Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = e^{b \ln a}$ für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$; folglich ist f als Verknüpfung der differenzierbaren Funktionen exp (als äußerer Funktion) und $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x} \ln x$ (als innerer Funktion) differenzierbar, insbesondere also auch stetig, und nach der Kettenregel und (für das Nachdifferenzieren von g) der Produktregel gilt

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Für das Monotonieverhalten von f ergibt sich damit:

- Für alle $x \in]0, e[$ ist $\ln x < 1$, also $1 - \ln x > 0$, und damit wegen $x^{\frac{1}{x}} > 0$ und $\frac{1}{x^2} > 0$ auch $f'(x) > 0$; folglich ist die stetige Funktion f auf $]0, e]$ streng monoton wachsend.
- Für alle $x \in]e, +\infty[$ ist $\ln x > 1$, also $1 - \ln x < 0$, und damit wegen $x^{\frac{1}{x}} > 0$ und $\frac{1}{x^2} > 0$ auch $f'(x) < 0$; folglich ist die stetige Funktion f auf $[e, +\infty[$ streng monoton fallend.

Wegen

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} = -\infty$$

ergibt sich zunächst

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{g(x)} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0.$$

Ferner erhalten wir mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

sowie aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion im Punkt $a = 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{g(x)} = e^0 = 1.$$

Damit existieren beide Grenzwerte im eigentlichen Sinne.