MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 2
20.05.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

5. a) Wir zeigen, daß die Abbildung f sowohl injektiv wie surjektiv ist:

   - Für alle x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt aufgrund des Monotonieverhaltens der Exponentialfunktion $e^{x_1} < e^{x_2}$ und damit

   $$f(x_1) = e^{x_1} + 2\,x_1 < e^{x_2} + 2\,x_2 = f(x_2);$$

   folglich ist f streng monoton wachsend und insbesondere injektiv.

   - f ist als Summe der stetigen Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^x$, und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 2\,x$, selbst stetig. Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gibt es wegen

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \Big(\underbrace{e^x}_{\to 0} + \underbrace{2\,x}_{\to-\infty}\Big) = -\infty$$

   ein $a < 0$ mit $f(a) < y$ sowie wegen

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \Big(\underbrace{e^x}_{\to \infty} + \underbrace{2\,x}_{\to\infty}\Big) = +\infty$$

   ein $b > 0$ mit $y < f(b)$, so daß nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a; b]$ mit $f(\xi) = y$ existiert; folglich ist $W_f = \mathbb{R}$ und damit f surjektiv.

   Aufgrund der Bijektivität von f besitzen beide Gleichungen jeweils genau eine Lösung; wegen

   $$f(0) = e^0 + 2 \cdot 0 = 1$$

   ist $x_1 = 0$ die Lösung von $f(x) = 1$, und wegen

   $$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{e} + 1$$

   ist $x_2 = \frac{1}{2}$ die Lösung von $f(x) = 1 + \sqrt{e}$.

   b) Die Funktion f ist auf dem Intervall $\mathbb{R}$ definiert und gemäß a) streng monoton wachsend; ferner ist f als Summe der differenzierbaren Funktionen f_1 und f_2 selbst differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

   $$f'(x) = e^x + 2 > 0 + 2 = 2 > 0;$$

damit ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (in allen Punkten $y \in \mathbb{R}$) differenzierbar, und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + 2} = \frac{1}{3}$$

und

$$\left(f^{-1}\right)'(1 + \sqrt{e}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1 + \sqrt{e}))} = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}} + 2} = \frac{1}{\sqrt{e} + 2}.$$

6. Die Funktion f ist als Produkt der stetigen Funktionen exp und cos selbst stetig; nach dem Satz von Weierstraß besitzt f demnach eine globale Minimalstelle p und eine globale Maximalstelle q, und für den Wertebereich gilt $W_f = [f(p), f(q)]$.

   Mit einer entsprechenden Begründung ist f differenzierbar, und mit der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = e^x \cdot \cos x + e^x \cdot (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$. Für ein lokales Extremum a von f gibt es nun die beiden folgenden Möglichkeiten:

   - a ist ein Randpunkt von $D_f = [0, 2\pi]$, also $a \in \{0, 2\pi\}$.
   - a ist im Innern von D_f; dann gilt $f'(a) = 0$. Wegen

$$f'(x) = 0 \iff \cos x = \sin x \iff \tan x = 1$$

     ist also $a \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.

   Mit Hilfe der Wertetabelle

a	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
$f(a)$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{5\pi}{4}}$	$e^{2\pi}$

   mit $-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{5\pi}{4}} < 1 < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}} < e^{2\pi}$ ergibt sich $p = \frac{5\pi}{4}$ und $q = 2\pi$; man erhält also

$$W_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{5\pi}{4}}, e^{2\pi}\right].$$

7. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin^3 x + \cos x,$$

   ist als Summe des Cosinus und der Verknüpfung einer Polynomfunktion und des Sinus stetig und differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt mit der Kettenregel

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x - \sin x.$$

   Seien nun a, $b \in \mathbb{R}$; da für $a = b$ die zu zeigende Ungleichung

$$\left|\sin^3 b + \cos b - \sin^3 a - \cos a\right| \leq 4\,|b - a|$$

trivial erfüllt ist, können wir $a \neq b$ und damit sogar $a < b$ annehmen. Die Einschränkung $f|_{[a,b]}$ der differenzierbaren Funktion f auf das abgeschlossene Intervall $[a,b]$ erfüllt insbesondere die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[a,b]$ und Differenzierbarkeit auf $]a,b[$, und wir erhalten ein $\xi \in \,]a,b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a).$$

Wegen

$$\begin{aligned} |f'(\xi)| = \left|3\,\sin^2\xi \cdot \cos\xi - \sin\xi\right| \leq \left|3\,\sin^2\xi \cdot \cos\xi\right| + |\sin\xi| = \\ = 3 \cdot \underbrace{|\sin\xi|}_{\leq 1}{}^2 \cdot \underbrace{|\cos\xi|}_{\leq 1} + \underbrace{|\sin\xi|}_{\leq 1} \leq 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 1 = 4 \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \left|\sin^3 b + \cos b - \sin^3 a - \cos a\right| = |f(b) - f(a)| = \\ = |f'(\xi) \cdot (b-a)| = |f'(\xi)| \cdot |b-a| \leq 4 \cdot |b-a|. \end{aligned}$$

8. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Einschränkung f des natürlichen Logarithmus auf das abgeschlossene Intervall $[n, n+1]$, es ist also

$$f : [n, n+1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x.$$

Damit ist f differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in [n, n+1]$; insbesondere genügt f den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[n, n+1]$ und Differenzierbarkeit auf $]n, n+1[$. Der Mittelwertsatz liefert nun ein $\xi \in \,]n, n+1[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{\xi} = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Wegen

$$n < \xi < n+1 \qquad \text{folgt} \qquad \frac{1}{n} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{n+1},$$

so daß sich insgesamt

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n},$$

insbesondere also die Behauptung

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

ergibt. Damit gilt die Beziehung

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

auch für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, und man erhält zum einen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \\ = \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)\end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - 1 = \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \\ = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n) - \ln 1 = \ln(n).\end{aligned}$$