MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 1
15.05.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. a) Es gilt
$$f(x) = 3\,x^2 - 4\ln|x| - 2\,x^{-2}$$
und damit
$$f'(x) = 3\cdot(2\,x) - 4\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot((-2)\,x^{-3}) = 6\,x - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^3}$$
für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) Mit Hilfe der Produktregel und (für die Ableitung des zweiten Faktors) der Kettenregel erhalten wir
$$g'(x) = 1\cdot\ln(x^2+1) + x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,(2\,x) = \ln(x^2+1) + \frac{2\,x^2}{x^2+1}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Mit Hilfe der Quotientenregel und (für die Ableitung des Zählers) der Kettenregel erhalten wir
$$h'(x) = \frac{x\cdot(2\,\ln x\cdot\frac{1}{x}) - ((\ln x)^2+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2\,\ln x - (\ln x)^2 - 1}{x^2} =$$
$$= -\frac{1-2\ln x + (\ln x)^2}{x^2} = -\frac{(1-\ln x)^2}{x^2} = -\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)^2$$
für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

d) Für die Ableitung des ersten Summanden
$$k_1 : \,]-a,a[\, \to \mathbb{R}, \quad k_1(x) = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$$
verwenden wir die Produktregel und (für die Ableitung des zweiten Faktors) die Kettenregel und erhalten
$$k_1'(x) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2\,x)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$
für alle $x \in \,]-a,a[$; für die Ableitung des zweiten Summanden
$$k_2 : \,]-a,a[\, \to \mathbb{R}, \quad k_2(x) = \frac{a^2}{2}\,\arcsin\frac{x}{a}$$

verwenden wir dann die Kettenregel und erhalten

$$k_2'(x) \;=\; \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} \;=\; \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \cdot a^2}} \;=\; \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

für alle $x \in \left]-a, a\right[$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} k'(x) &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right) + \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{-x^2+a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{\sqrt{a^2-x^2}^{\,2}}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-x^2} \end{aligned}$$

für alle $x \in \left]-a, a\right[$.

2. Die allgemeine Potenz a^b für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$a^b = \exp(b \cdot \ln a) = e^{b \ln a}.$$

Dementsprechend ist $f(x) = e^{x \ln x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$; folglich ist f als Verknüpfung der differenzierbaren Funktionen exp (als äußerer Funktion) und $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x \ln x$ (als innerer Funktion) differenzierbar, und nach der Kettenregel und (für das Nachdifferenzieren von f_1) der Produktregel gilt

$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (1 + \ln x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

Ferner ist $g(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$; folglich ist f als Verknüpfung der differenzierbaren Funktionen exp (als äußerer Funktion) und $g_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = \frac{1}{x} \ln x$ (als innerer Funktion) differenzierbar, und nach der Kettenregel und (für das Nachdifferenzieren von g_1) der Produktregel gilt

$$g'(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

3. a) Zu betrachten ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für alle $x \neq 0$ gilt

$$|f(x) - f(0)| = \left| x \cos \frac{1}{x} - 0 \right| = |x| \cdot \underbrace{\left| \cos \frac{1}{x} \right|}_{\leq 1} \leq |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

woraus sich mit dem Schrankenlemma in

$$|f(x) - f(0)| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

die Stetigkeit von f im Punkt $a = 0$ ergibt. Als Differenzenquotient von f im Punkt $a = 0$ ergibt sich

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \frac{x \cos \frac{1}{x}}{x} = \cos \frac{1}{x} \quad \text{mit} \quad x \neq 0;$$

zum einen ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge mit

$$\lim_{n \to \infty} \cos \frac{1}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} = 1,$$

zum anderen ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge mit

$$\lim_{n \to \infty} \cos \frac{1}{y_n} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\cos((2n+1)\pi)}_{=-1} = -1,$$

so daß dieser Differenzenquotient für $x \to 0$ keinen Grenzwert besitzt. Folglich ist f im Punkt $a = 0$ nicht differenzierbar.

b) Zu betrachten ist die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Als Differenzenquotient von g im Punkt $a = 0$ ergibt sich

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = x \cos \frac{1}{x} = f(x) \quad \text{mit} \quad x \neq 0,$$

und unter Verwendung von a) erhält man die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

im eigentlichen Sinne; folglich ist g im Punkt $a = 0$ differenzierbar und damit insbesondere auch stetig.

4. Die zu betrachtende Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = |x| \cdot g(x) = \begin{cases} x \cdot g(x), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \\ -x \cdot g(x), & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

ist (wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von g) nach der Produktregel zunächst in allen Punkten $a \neq 0$ differenzierbar mit

$$h'(a) = \begin{cases} g(a) + a \cdot g'(a), & \text{für } a > 0, \\ -g(a) - a \cdot g'(a), & \text{für } a < 0; \end{cases}$$

mit der Stetigkeit von g (im Punkte $a = 0$) ergibt sich

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{|x| \cdot g(x) - 0}{x - 0} = \underbrace{\frac{|x|}{x}}_{=\pm 1} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(0)=0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

so daß h auch im Punkt $a = 0$ differenzierbar ist mit $h'(0) = 0$. Die Ableitungsfunktion $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist zunächst aufgrund der Stetigkeit von g und g' in allen Punkten $a \neq 0$ stetig; ferner gilt mit der Stetigkeit von g und g' im Punkte $a = 0$ auch

$$h'(x) = \underbrace{g(x)}_{\to g(0)=0} + \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\to g'(0)} \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} 0 = h'(0)$$

sowie entsprechend

$$h'(x) = -\underbrace{g(x)}_{\to g(0)=0} - \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\to g'(0)} \underset{x \to 0-}{\longrightarrow} 0 = h'(0),$$

weswegen h' auch im Punkte $a = 0$ stetig ist. Insgesamt ist also h eine stetig differenzierbare Funktion.