MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 11
24.07.2020

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II"

41. *(Klausuraufgabe Sommersemester 2016).*

a) Man bestimme den Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\, x^{2n}.$$

Im folgenden bezeichne

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\, x^{2n},$$

die von der Potenzreihe auf $D = \left]-\varrho, \varrho\right[$ definierte Funktion.

b) Man begründe, daß f zweimal differenzierbar ist, und zeige

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} \qquad \text{für alle} \quad x \in D.$$

c) Man stelle f als elementare Funktion dar.

42. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012).*

a) Für $a \neq 0$ zeige man $\displaystyle \frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

b) Man gebe mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die Taylorreihe von

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)}$$

bei der Entwicklung um 0 sowie ihren Konvergenzradius an.

43. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2017).* Gegeben sei die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt.$$

a) Man bestimme (etwa unter Verwendung der Cosinusreihe) die Taylorreihe von F mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$.

b) Man berechne $F^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

44. Für eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachte man die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ \alpha & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Man bestimme den Wert von α, für den die Funktion f stetig ist.

b) Man zeige, daß mit diesem Wert für α die Funktion f sogar beliebig oft differenzierbar ist, und bestimme $f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Abgabe bis Freitag, den 31. Juli 2020, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).