MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 8
03.07.2020

Übungen zur Vorlesung
„Differential– und Integralrechnung II“

29. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).*

a) Man bestimme das zweite Taylorpolynom T_2 der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(x^2\right),$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$.

b) Man beweise für alle $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{6}.$$

30. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2012).* Gegeben sei die Funktion

$$f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

a) Man finde für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel für die n–te Ableitung von f und beweise diese mittels vollständiger Induktion.

b) Man bestimme das Taylorpolynom T_2 von f im Entwicklungspunkt $a = 2$.

c) Man beweise

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{16}$$

für alle $x \in [1, 3]$.

31. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008).* Gegeben ist die reelle Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x \sin x.$$

Man bestimme mit Hilfe der Taylorformel eine Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Grad} p \leq 4$, so dass gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^4} = 0.$$

Man begründe ferner, daß für alle $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ gilt:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{480}.$$

32. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).*

a) Für alle $x \in [0, \pi]$ beweise man die Ungleichung

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

b) Man beweise diese Ungleichung für $x > \pi$.

Abgabe bis Freitag, den 10. Juli 2020, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).