

## Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

25. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2015*). Man berechne das Integral

$$\int_1^2 \cos\left(\pi \frac{3x-3}{3x-x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2-6x+9}\right) dx.$$

26. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2005*). Man beweise für  $0 < a < 1$  die Gleichheit

$$\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2}$$

und leite hieraus eine Funktionalgleichung für den Arcustangens her.

27. Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert:

- a)  $\int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$  und  $\int_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ ,  
b)  $\int_{-\infty}^\infty e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$ .

28. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012*). Gegeben sei die Funktion

$$f : [2, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

- a) Man zeige, daß  $f$  monoton fällt und nur positive Werte annimmt.  
b) Man bestimme mit Hilfe partieller Integration eine Stammfunktion von  $f$ .  
c) Man untersuche mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

auf Konvergenz.

**Abgabe** bis Freitag, den 3. Juli 2020, 12<sup>00</sup> Uhr (Kästen vor der Bibliothek).