MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 6
19.06.2020

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II"

21. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013).*

a) Man berechne $g(a) = \displaystyle\int_2^a \frac{x^2 - 2\,x - 1}{x - x^3}\,dx$ für $a \geq 2$.

b) Man gebe $g'(a)$ an und zeige, daß g in $a = 1 + \sqrt{2}$ ein globales Maximum auf dem Intervall $[2, \infty[$ hat.

22. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2010).* Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $I_n = \displaystyle\int_0^\pi (\sin(x))^n\,dx$. Man zeige

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2} \quad \text{für} \quad n \geq 2.$$

23. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).*

a) Man berechne $\displaystyle\int_0^{2\,\pi} x^3 \cos x\,dx$.

b) Man zeige, daß die Funktion

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

auf dem Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\,\pi}{4}\right]$ monoton fällt.

c) Man beweise mit Hilfe von b) die Abschätzung

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\,\pi}{4}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}.$$

24. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2015).* Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (\ln x)^2, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln\left(x^2\right).$$

a) Man zeige, daß die Graphen G_f und G_g genau zwei Schnittpunkte besitzen, und gebe deren x–Koordinaten a und b mit $a < b$ an.

b) Man zeige durch partielle Integration, daß der Inhalt A der durch G_f und G_g zwischen a und b begrenzten Fläche durch

$$A = \int_a^b x\,(f'(x) - g'(x))\,dx$$

gegeben wird.

c) Man bestimme mit Hilfe von b) den Wert des Flächeninhalts A.

Abgabe bis Freitag, den 26. Juni 2020, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).