

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

17. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2012*). Man betrachte die Funktion

$$f :]-e, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x - e}{x + e}.$$

Man zeige, daß der Flächeninhalt der Fläche, die durch den Graphen von f und der x -Achse von $x = 0$ und $x = 3e$ eingeschlossen wird, den Wert e hat.

18. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2008*).

a) Man bestimme eine reelle Zahl c so, daß die Funktion

$$f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^x, & \text{falls } x > 0 \\ c, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

b) Man zeige: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 1.$

19. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011*). Man betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ mit } a > 0.$$

Man berechne

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^a \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

20. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton fallende Funktion. Man zeige, daß das Integral

$$g(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert, und beweise, daß $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls eine streng monoton fallende Funktion ist.

Abgabe bis Freitag, den 19. Juni 2020, 12⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).