

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

13. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2017*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - 3x^2.$$

- Man zeige (etwa mit Hilfe des Nullstellensatzes), daß die Funktion f mindestens 3 Nullstellen besitzt.
- Man zeige (etwa mit Hilfe des Satzes von Rolle), daß die Funktion f höchstens 3 Nullstellen besitzt.

14. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2017*). Gegeben sei die Funktion

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \begin{cases} \sin(x - a), & \text{für } x \geq 0, \\ \frac{e^{bx} - 1}{x} - b, & \text{für } x < 0; \end{cases}$$

dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Parameter.

- Man bestimme alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die $f_{a,b}$ in 0 stetig ist.
- Man bestimme alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die $f_{a,b}$ in 0 differenzierbar ist.

15. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2017*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |x|^x, & \text{für } x \neq 0, \\ 1, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- Man untersuche f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.
- Man bestimme die Monotonieintervalle von f .
- Man bestimme $f(\mathbb{R})$.

16. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2015*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x) - x.$$

- Man zeige, daß f' unendlich viele Nullstellen hat.
- Man zeige, daß f streng monoton fällt.
- Man zeige, daß f genau eine Nullstelle hat, und gebe ein abgeschlossenes Intervall der Länge π an, das die Nullstelle enthält.

Abgabe bis Freitag, den 12. Juni 2020, 12⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).