MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 3
29.05.2020

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

9. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).*

   a) Man zeige
   $$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} = -\frac{1}{2}.$$

   b) Man berechne
   $$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

10. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2012).* Gegeben sei die Funktion
   $$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot (2\,x - 1 + \ln(x)).$$
   Man beweise:

   a) $g = f'$ ist streng monoton wachsend auf $]0,+\infty[$.

   b) $g = f'$ hat genau eine Nullstelle in $]0,+\infty[$.

   c) f hat genau ein lokales Extremum in $]0,+\infty[$, und zwar ein Minimum.

11. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).*

   a) Man zeige, daß die Funktion
   $$h :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1},$$
   streng monoton fällt und nur positive Werte annimmt.

   b) Man zeige, daß die Funktion
   $$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$
   streng monoton steigt, und bestimme ihren Wertebereich.

12. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008).* Gegeben sei die Funktion
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x + \frac{1}{1+x^2}.$$

   a) Man zeige, daß die Funktion f umkehrbar ist, und bestimme ihren Wertebereich $W_f = f(\mathbb{R})$.

   b) Man begründe, daß die Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$ stetig ist, und gebe alle Punkte $a \in \mathbb{R}$ an, in denen f^{-1} auch differenzierbar ist.

Abgabe bis Freitag, den 5. Juni 2020, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).