

## Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“

5. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2001*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2e^x - x.$$

Man zeige:

- Für den Wertebereich von  $f$  gilt  $W_f = ]2, +\infty[$ .
- $f$  besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion  $f^{-1}$ .
- Für alle  $a, b \in W_f$  mit  $a \neq b$  gilt  $|f^{-1}(b) - f^{-1}(a)| < |b - a|$ .

6. Man bestimme den Wertebereich der Funktion

$$f : [0, e^2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -e^2 x, & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{e}, \\ \frac{1}{x} \ln x, & \text{für } \frac{1}{e} \leq x \leq e^2. \end{cases}$$

7. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2002*). Für alle  $x, y \in [-1, 1]$  zeige man

$$\left| \sin \frac{x^3 + x}{2} - \sin \frac{y^3 + y}{2} \right| \geq \frac{\cos 1}{2} \cdot |x - y|.$$

8. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2011*). Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  reelle Zahlen mit  $a < b$  sowie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige und auf  $]a, b[$  differenzierbare Funktionen mit  $f(a) < g(a)$  und  $f'(x) \leq g'(x)$  für alle  $x \in ]a, b[$ . Man zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, daß  $f(x) < g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt.

**Abgabe** bis Freitag, den 29. Mai 2020, 12<sup>00</sup> Uhr (Kästen vor der Bibliothek).