MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Klausur
07.10.2016

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

1. a) Man formuliere die Regel von de l'Hospital für $x \to a+$ im Falle „$\frac{0}{0}$“. (2)

   b) Man bestimme den Grenzwert
$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^x - 1}{x \ln x}. \qquad (2)$$

   c) Man zeige, daß es genau eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \frac{\sin(\pi\, x)}{\ln x} \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$
gibt, und bestimme $f(1)$. (2)

2. Gegeben sei die Funktion
$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos t}\, dt.$$

   a) Man begründe, daß f differenzierbar ist, und gebe f' an. (1)

   b) Man begründe, daß f beliebig oft differenzierbar ist, und bestimme das zweite Taylorpolynom T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$. (2)

   c) Man zeige die Abschätzung
$$|f(x) - T_2(x)| \le \frac{4\,\pi^3}{27} \qquad \text{für alle} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[. \qquad (3)$$

3. a) Man bestimme den Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\, x^{2n}.$$
   Im folgenden bezeichne
$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\, x^{2n},$$
   die von der Potenzreihe auf $D = \left]-\varrho, \varrho\right[$ definierte Funktion. (2)

   b) Man begründe, daß f zweimal differenzierbar ist, und zeige
$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} \qquad \text{für alle} \quad x \in D. \qquad (2)$$

   c) Man stelle f als elementare Funktion dar. (2)

4. a)

- Für eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}^n$ auf dem Intervall $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ definiere man „f ist eine Kurve.“. (1)
- Für eine Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ definiere man „f ist differenzierbar.“ und gebe in diesem Fall den Tangentialvektor von f zu $t \in I$ an. (1)
- Man formuliere eine hinreichende Bedingung für die Rektifizierbarkeit einer Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ und gebe in diesem Fall eine Formel für ihre Bogenlänge an. (1)

b) Man begründe, daß die Kurve

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) = (2\sin t + \cos t,\ \sin t + 2\cos t,\ 2\sin t - 2\cos t),$$

rektifizierbar ist, und berechne ihre Bogenlänge. (3)