

## Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

45. Man betrachte die Teilmengen

$$R_1 = [-3, 3] \times [-1, 1] \quad \text{und} \quad R_2 = ]-1, 1[ \times ]-3, 3[$$

sowie  $X_1 = R_1 \cap R_2$  und  $X_2 = R_1 \cup R_2$  von  $\mathbb{R}^2$ .

- a) Man skizziere diese vier Teilmengen und entscheide, welche konvex bzw. zusammenhängend sind.
- b) Man bestimme für jede dieser Teilmengen den Rand sowie das Innere und den Abschluß. Welche Teilmengen sind offen bzw. abgeschlossen?

46. Gegeben sei die Menge  $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- a) Man zeige, daß  $X$  keine inneren Punkte besitzt.
- b) Man bestimme den Rand  $\partial X$  von  $X$ .

47. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006.*) Man beweise, daß  $(0, 0)$  ein Randpunkt der Teilmenge

$$\left\{ \left( x, \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right) \mid x \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

des  $\mathbb{R}^2$  ist.

48. Für den Parameter  $a > 0$  ist die Kurve

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_a(t) = (e^{at} \cos t, e^{at} \sin t),$$

gegeben; ihre Bildmenge  $K_a$  heißt *logarithmische Spirale*.

- a) Man zeige, daß die Kurve  $f_a$  jede Ursprungsgerade unter dem Winkel  $\alpha$  mit  $\cot \alpha = a$  schneidet.
- b) Man skizziere die Bildmenge  $K_a$  der Kurve  $f_a$  für  $a = \frac{1}{\pi}$ .
- c) Man berechne die Bogenlänge  $L_a(T)$  der Kurve  $f_a$  zwischen  $T < 0$  und 0 und bestimme  $\lim_{T \rightarrow -\infty} L_a(T)$ .