

Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“

21. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2005*). Man bestimme das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und zeige hiermit

$$\left| \cos\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - T_2(1) \right| \leq \frac{1}{6}.$$

22. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (\pi - x) \cos(x).$$

- a) Man bestimme die ersten drei Ableitungen f' , f'' und f''' von f .
- b) Man bestimme das Taylorpolynom T_2 von f im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.
- c) Man zeige für alle $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{\pi^3}{64}.$$

23. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010*). Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x}.$$

- a) Man bestimme mittels der Taylorformel ein Polynom p_2 zweiten Grades mit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (f(x) - p_2(x)) = 0.$$

- b) Man beweise für alle $x \in [0, \infty[$ die Abschätzung

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{16} x^3.$$

24. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2010*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x e^x - e^{-x}.$$

- a) Man zeige, daß die Einschränkung von f auf $] -1, \infty[$ eine differenzierbare Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ besitzt.
- b) Man berechne das Taylorpolynom ersten Grades T_1 von g um den Entwicklungspunkt -1 .