

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

1. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007*). Man beweise, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(x^3) + \arctan x + x^2 - 2,$$

mindestens zwei Nullstellen und mindestens eine Nullstelle der Ableitung besitzt.

2. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006*). Man zeige, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a < b \leq \pi$ die Beziehung

$$(b - a) \cos b < \sin b - \sin a < (b - a) \cos a$$

gilt.

3. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2012*). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = -3$ und $1 < f'(x) < 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, daß f im Intervall $[1, 3]$ eine Nullstelle besitzt.
4. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2004*). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige und auf $]a, b[$ differenzierbaren Funktionen mit $f' = g$ und $g' = f$; ferner sei $f(a) = 1$ und $g(a) = 0$. Man zeige, daß für alle $x \in]a, b[$ gilt:

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1.$$