

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

45. Wir betrachten Teilmengen $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

a) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachten wir die beiden Rechtecke

$$X_1 = [-3, 3] \times [-1, 1] \quad \text{und} \quad X_2 =]-1, 1[\times]-3, 3[$$

sowie ihre Vereinigung

$$X_1 \cup X_2 = ([-3, 3] \times [-1, 1]) \cup (]-1, 1[\times]-3, 3[)$$

von Tutoriumsaufgabe 45. Die beiden Mengen X_1 und $X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ sind konvex, die Vereinigung $X_1 \cup X_2$ hingegen nicht.

b) Die Aussage ist wahr: zum Beweis seien X_1 und $X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ beliebige konvexe Teilmengen sowie $x, y \in X_1 \cap X_2$. Damit gilt $x, y \in X_1$ und $x, y \in X_2$, und wegen der Konvexität von X_1 und X_2 verläuft die Verbindungsstrecke von x und y sowohl komplett in X_1 als auch komplett in X_2 , also komplett in $X_1 \cap X_2$. Folglich ist auch $X_1 \cap X_2$ konvex.

c) Die Aussage ist wahr: zum Beweis seien X_1 und $X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ beliebige zusammenhängende Teilmengen mit $p \in X_1 \cap X_2$ sowie $x, y \in X_1 \cup X_2$. Damit gibt es $i, j \in \{1, 2\}$ mit $x \in X_i$ und $y \in X_j$, und es gilt $p \in X_i$ und $p \in X_j$; da nun X_i und X_j zusammenhängend sind, gibt es zum einen eine Kurve, die x und p verbindet und komplett in X_i verläuft, und zum anderen eine Kurve, die p und y verbindet und komplett in X_j verläuft. Wegen $X_i \subseteq X_1 \cup X_2$ und $X_j \subseteq X_1 \cup X_2$ gibt es damit eine Kurve, die x und y über p verbindet und komplett in $X_1 \cup X_2$ liegt; folglich ist auch $X_1 \cup X_2$ zusammenhängend.

d) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachten wir die Kreislinie X_1 um $(0, 0)$ mit Radius $r = 1$ ohne den Punkt $(1, 0)$ sowie die Kreislinie X_2 um $(0, 0)$ mit Radius $r = 1$ ohne den Punkt $(-1, 0)$; damit sind X_1 und $X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängende Teilmengen. Der Durchschnitt $X_1 \cap X_2$ ist die Kreislinie um $(0, 0)$ mit Radius $r = 1$ ohne die beiden Punkte $(1, 0)$ und $(-1, 0)$, also zwei nichtzusammenhängende Halbkreislinien.

46. a) Wir betrachten die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

- Sei $a \in \mathbb{R}$. Für jedes $r > 0$ betrachten wir das Intervall

$$K_r(a) =]a - r, a + r[;$$

da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in \mathbb{R} liegt, enthält $K_r(a)$ auch irrationale Zahlen, es gilt also $K_r(a) \not\subseteq \mathbb{Q}$. Folglich besitzt \mathbb{Q} keine inneren Punkte.

- Sei $a \in \mathbb{R}$. Für jedes $r > 0$ betrachten wir das Intervall

$$K_r(a) =]a - r, a + r[;$$

da \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} liegt, enthält $K_r(a)$ auch rationale Zahlen, es gilt also $K_r(a) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Folglich besitzt \mathbb{Q} keine äußeren Punkte.

- Da die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ weder innere noch äußere Punkte besitzt, sind alle $a \in \mathbb{R}$ Randpunkte von \mathbb{Q} ; es ist also $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

b) Wir betrachten die Teilmenge $X = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ aller geraden natürlichen Zahlen sowie $Y = \mathbb{R} \setminus X$.

- Sei $x \in X$; für jedes $r > 0$ enthält $K_r(x) =]x - r, x + r[$ nicht nur ganze Zahlen, und damit ist $K_r(x) \not\subseteq X$, so daß x kein innerer Punkt von X ist. Damit ist X aber insbesondere keine offene Teilmenge von \mathbb{R} .
- Sei $y \in Y$; wir treffen die folgende Fallunterscheidung:
 - Es ist $y \in]-\infty, 2[$; dann ist $r = 2 - y > 0$ mit

$$K_r(y) =]y - r, y + r[\subseteq]-\infty, 2[\subseteq Y.$$

- Es ist $y \in]2n, 2(n+1)[$ für ein $n \in \mathbb{N}$; dann ist

$$r = \min \{y - 2n, 2(n+1) - y\} > 0$$

mit

$$K_r(y) =]y - r, y + r[\subseteq]2n, 2(n+1)[\subseteq Y.$$

Damit ist y ein innerer Punkt von Y , so daß Y eine offene und damit X eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} ist.

- Zu jedem $r > 0$ gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$ mit $r < 2n$; damit ist $X \not\subseteq K_r(0)$. Folglich ist X nicht beschränkt, insbesondere also keine kompakte Teilmenge von \mathbb{R} .

47. a) Zum Nachweis der Äquivalenz

$$\text{dist}(a, X) = 0 \iff a \in \overline{X}$$

können wir die wegen $\text{dist}(a, X) \geq 0$ logisch gleichwertige Äquivalenz

$$\text{dist}(a, X) > 0 \iff a \notin \overline{X}$$

zeigen:

- Für „ \implies “ sei $r = \text{dist}(a, X) > 0$. Damit ist $d(a, x) \geq r$ für alle $x \in X$, also $K_r(a) \cap X = \emptyset$. Folglich ist a ein äußerer Punkt von X , also $a \notin \overline{X}$.
- Für „ \impliedby “ sei $a \notin \overline{X}$. Damit ist a ein äußerer Punkt von X , es gibt also ein $r > 0$ mit $K_r(a) \cap X = \emptyset$; folglich ist $d(a, x) \geq r$ für alle $x \in X$, und es gilt $\text{dist}(a, X) \geq r > 0$.

b) Es gilt zum einen

$$\begin{aligned} \text{sdist}(a, X) < 0 &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} \text{dist}(a, Y) > 0 \stackrel{\text{a)}}{\iff} a \notin \bar{Y} \iff \\ &\iff a \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{Y} = \overset{\circ}{X} \iff a \text{ ist ein innerer Punkt von } X \end{aligned}$$

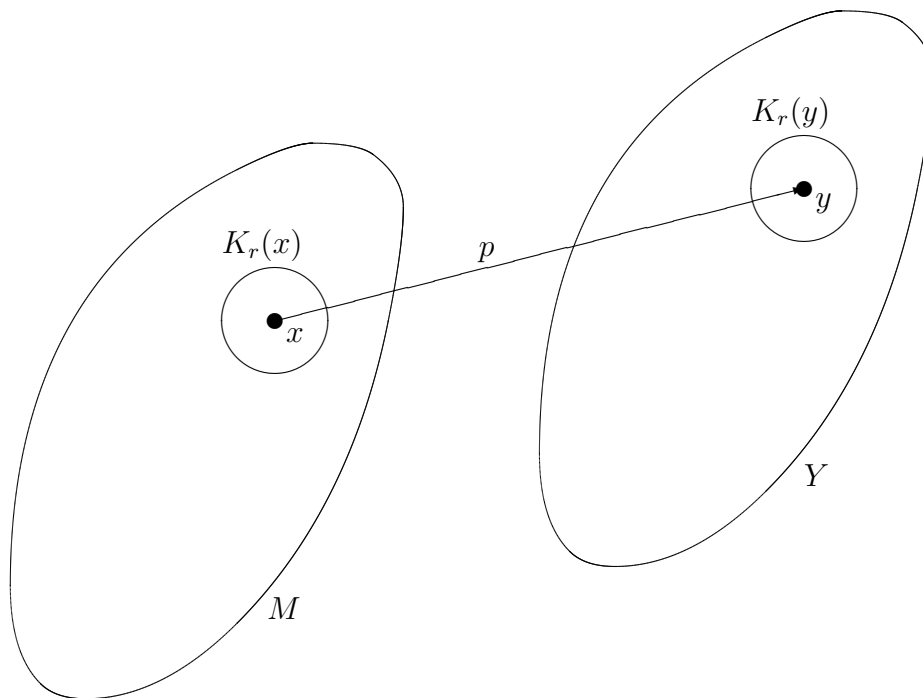
und zum anderen

$$\begin{aligned} \text{sdist}(a, X) > 0 &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} \text{dist}(a, X) > 0 \stackrel{\text{a)}}{\iff} a \notin \bar{X} \iff \\ &\iff a \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{X} = \overset{\circ}{Y} \iff a \text{ ist ein äußerer Punkt von } X; \end{aligned}$$

zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{sdist}(a, X) = 0 &\iff (\text{sdist}(a, X) \not< 0 \text{ und } \text{sdist}(a, X) \not> 0) \iff \\ &\iff a \text{ ist weder ein innerer noch ein äußerer Punkt von } X \iff \\ &\iff a \text{ ist ein Randpunkt von } X. \end{aligned}$$

48. Die Teilmenge $Y = \{p + x \mid x \in M\}$ von \mathbb{R}^2 entsteht aus der offenen Teilmenge M von \mathbb{R}^2 durch Verschiebung um p .



Wir weisen anhand der Definition nach, daß auch Y offen ist; sei dazu $y \in Y$, es ist also $y = p + x$ für ein $x \in M$. Da M eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist, existiert ein $r > 0$ mit $K_r(x) \subseteq M$, und wir zeigen, daß die Kreisscheibe $K_r(y)$ mit dem

um p verschobenen Mittelpunkt $y = p + x$ und demselben Radius $r > 0$ ganz in Y liegt: für alle $z \in K_r(y)$ gilt

$$\|z - (p + x)\| = \|z - y\| < r$$

und damit

$$\|(z - p) - x\| < r, \quad \text{also} \quad z - p \in K_r(x) \subseteq M;$$

es gibt also ein $m \in M$ mit $z - p = m$, und damit folgt $z = p + m \in Y$.