

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

41. a) Für die gegebene Kurve

$$f : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),$$

besitzt der Punkt $f(t) \in K$ für $t \in [0; 2\pi]$ vom Ursprung $(0, 0)$ den Abstand

$$d(t) = \|f(t)\| = \|(\cos^3 t, \sin^3 t)\| = \sqrt{(\cos^3 t)^2 + (\sin^3 t)^2};$$

aufgrund der Monotonie der Quadratwurzel ist $d(t)$ genau dann minimal bzw. maximal, wenn $d(t)^2$ minimal bzw. maximal ist. Wegen

$$\begin{aligned} d(t)^2 &= \cos^6 t + \sin^6 t = (\cos^2 t)^3 + \sin^6 t = (1 - \sin^2 t)^3 + \sin^6 t = \\ &= (1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t) + \sin^6 t = 1 - 3\sin^2 t (1 - \sin^2 t) = \\ &= 1 - 3\sin^2 t \cos^2 t = 1 - \frac{3}{4} (2 \sin t \cos t)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2(2t) \end{aligned}$$

ergibt sich wegen $0 \leq \sin^2(2t) \leq 1$

$$\frac{1}{4} \leq d(t)^2 \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \leq d(t) \leq 1$$

mit

$$\begin{aligned} d(t) = \frac{1}{2} &\iff d(t)^2 = \frac{1}{4} \iff \sin^2(2t) = 1 \iff \sin(2t) = \pm 1 \iff \\ &\iff 2t \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right\} \iff t \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(t) = 1 &\iff d(t)^2 = 1 \iff \sin^2(2t) = 0 \iff \sin(2t) = 0 \iff \\ &\iff 2t \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\} \iff t \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}. \end{aligned}$$

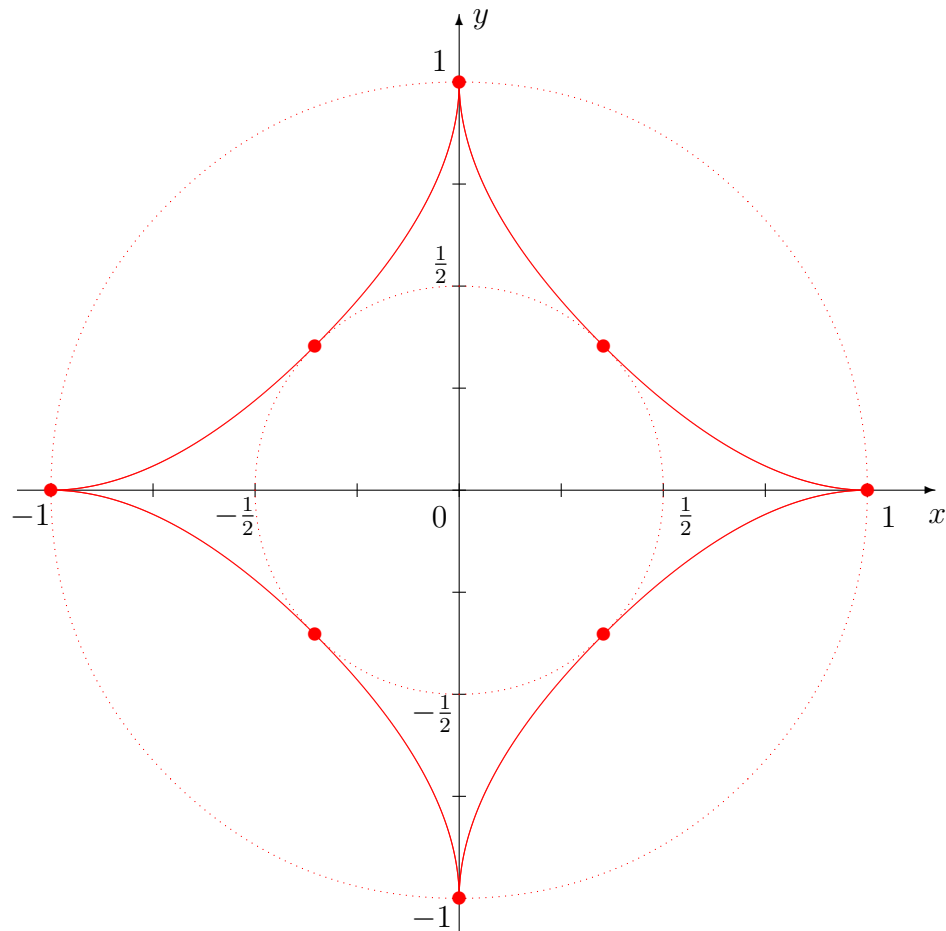
b) Gemäß a) besitzen die Kurvenpunkte

t	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$f(t)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$	$\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$	$\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$

den kleinsten Abstand $\frac{1}{2}$ und

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(-1, 0)$	$(0, -1)$	$(1, 0)$

den größten Abstand 1 vom Ursprung $(0, 0)$; damit ergibt sich die folgende Skizze der Bildmenge K :



c) Die gegebene Kurve f ist stetig differenzierbar mit

$$f'(t) = (3 \cos^2 t \cdot (-\sin t), 3 \sin^2 t \cdot \cos t) = 3 \sin t \cos t \cdot (-\cos t, \sin t)$$

und damit

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= \|3 \sin t \cos t \cdot (-\cos t, \sin t)\| \\ &= |3 \sin t \cos t| \cdot \|(-\cos t, \sin t)\| \\ &= \left| \frac{3}{2} \cdot (2 \sin t \cos t) \right| \cdot \sqrt{(-\cos t)^2 + (\sin t)^2} \\ &= \left| \frac{3}{2} \cdot \sin(2t) \right| \cdot \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= \frac{3}{2} |\sin(2t)| \end{aligned}$$

für alle $t \in [0; 2\pi]$. Folglich ist die Kurve f rektifizierbar, und für die gesuchte Bogenlänge ergibt sich aufgrund der Periodizität der Sinusfunktion

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} |\sin(2t)| dt = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2t)| dt = \\ &= 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = 6 \cdot \left[\frac{-\cos(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6 \cdot \left(\frac{-\cos \pi}{2} - \frac{-\cos 0}{2} \right) = 6. \end{aligned}$$

42. a) Die gegebene Kurve

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) = (t^2 - 1, t^3 - t),$$

ist stetig differenzierbar, und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(t) = (2t, 3t^2 - 1).$$

Damit besitzt f in denjenigen Kurvenpunkten $f(t)$ eine

- zur x -Achse parallele Tangente, in denen der Tangentialvektor $f'(t)$ von f und der Richtungsvektor $(1, 0)$ der x -Achse linear abhängig sind; wegen

$$3t^2 - 1 = 0 \iff t^2 = \frac{1}{3} \iff t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ist dies in

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \quad \text{mit} \quad f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$$

und

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \quad \text{mit} \quad f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$$

der Fall.

- zur y -Achse parallele Tangente, in denen der Tangentialvektor $f'(t)$ von f und der Richtungsvektor $(0, 1)$ der y -Achse linear abhängig sind; wegen

$$2t = 0 \iff t = 0$$

ist dies in

$$f(0) = (-1; 0) \quad \text{mit} \quad f'(0) = (0; -1)$$

der Fall.

b) Für einen Doppelpunkt $f(a) = f(b)$ mit $a < b$ gilt

$$(a^2 - 1, a(a^2 - 1)) = (b^2 - 1, b(b^2 - 1)),$$

also

$$a^2 - 1 = b^2 - 1 \implies a^2 = b^2 \implies a = -b,$$

woraus sich wegen $a < b$ schon $a < 0 < b$ ergibt, sowie

$$a(a^2 - 1) = b(b^2 - 1) \implies -b(b^2 - 1) = b(b^2 - 1),$$

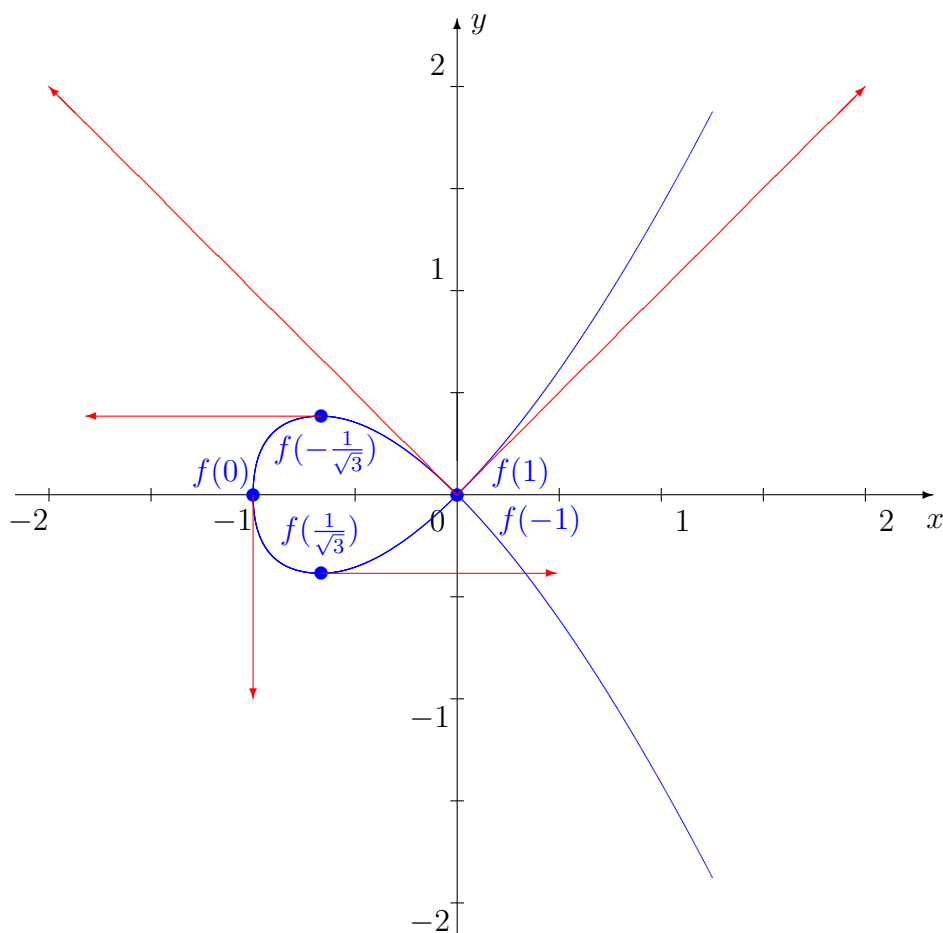
woraus sich dann $b(b^2 - 1) = 0$, wegen $b > 0$ also $b = 1$ und $a = -1$ ergibt. Folglich besitzt die Kurve f genau den Doppelpunkt

$$f(-1) = (0; 0) = f(1),$$

und für die beiden Tangentialvektoren ergibt sich

$$f'(-1) = (-2; 2) \quad \text{und} \quad f'(1) = (2; 2).$$

- c) Unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse ergibt sich für die Bildmenge K der Kurve f die folgende Skizze:



- d) Gemäß a) ist $f(-1) = f(1)$, so daß die (hier ebenfalls mit f bezeichnete) Teilkurve

$$f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)),$$

geschlossen ist; gemäß b) umrandet sie die zu betrachtende Fläche im Gegenurzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn. Da diese symmetrisch zur x -Achse liegt, ist nur der im 2. Quadranten gelegene Teil zu betrachten, der von der x -Achse und der Teilkurve

$$f : [-1; 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

mit

$$\varphi(t) = t^2 - 1 \quad \text{und} \quad \psi(t) = t(t^2 - 1)$$

für alle $t \in [-1; 0]$ begrenzt wird. Wegen

$$\varphi'(t) = 2t < 0 \quad \text{für alle} \quad t \in [-1, 0[$$

ist φ auf $[-1, 0]$ streng monoton fallend mit $\varphi(-1) = 0$ und $\varphi(0) = -1$, so daß f den Graphen der Funktion

$$h : [-1; 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \psi(\varphi^{-1}(t)),$$

darstellt. Für den gesuchten Flächeninhalt ergibt sich also unter Verwendung der Substitutionsregel (*)

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \int_{-1}^0 h(x) dx = 2 \cdot \int_{\varphi(0)}^{\varphi(-1)} h(x) dx \stackrel{(*)}{=} 2 \int_0^{-1} \underbrace{h(\varphi(t))}_{=\psi(t)} \cdot \varphi'(t) dt = \\ &= 2 \int_0^{-1} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt = 2 \int_0^{-1} t(t^2 - 1) \cdot 2t dt = 4 \int_0^{-1} (t^4 - t^2) dt = \\ &= 4 \cdot \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_0^{-1} = 4 \cdot \left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

43. a) Der Kurvenpunkt

$$f(t) = (t^2 \cos(2\pi t), t^2 \sin(2\pi t), t^2)$$

für $t \in [0; 1]$ besitzt die Koordinaten

$$x = t^2 \cos(2\pi t), \quad y = t^2 \sin(2\pi t), \quad z = t^2,$$

so daß sich

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= (t^2 \cos(2\pi t))^2 + (t^2 \sin(2\pi t))^2 - (t^2)^2 = \\ &= t^4 \cos^2(2\pi t) + t^4 \sin^2(2\pi t) - t^4 = t^4 \underbrace{(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t))}_{=1} - t^4 = 0 \end{aligned}$$

ergibt; folglich verläuft die Kurve auf dem Kreiskegel $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

b) Für alle $t \in [0; 1]$ ergibt sich für den Abstand $d(t)$ des Kurvenpunkts $f(t)$ vom Punkt $p = (0, 0, 1)$

$$\begin{aligned} d(t)^2 &= \|f(t) - p\|^2 \\ &= \|(t^2 \cos(2\pi t), t^2 \sin(2\pi t), t^2 - 1)\|^2 \\ &= (t^2 \cos(2\pi t))^2 + (t^2 \sin(2\pi t))^2 + (t^2 - 1)^2 \\ &= t^4 (\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)) + (t^4 - 2t^2 + 1) \\ &= 2t^4 - 2t^2 + 1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (4(t^2)^2 - 4t^2 + 1) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2t^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

damit ist

$$d(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(2t^2 - 1)^2}_{\geq 0} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad d(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

für alle $t \in [0; 1]$ mit

$$d(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff d(t)^2 = \frac{1}{2} \iff 2t^2 - 1 = 0 \iff t^2 = \frac{1}{2} \underset{t \geq 0}{\iff} t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich ist für $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ der Abstand zwischen $f(t)$ und $p = (0, 0, 1)$ minimal und beträgt dann $d(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Die Kurve f ist stetig differenzierbar, und für alle $t \in [0; 1]$ gilt

$$\begin{aligned} f'(t) &= (2t \cos(2\pi t) - 2\pi t^2 \sin(2\pi t), 2t \sin(2\pi t) + 2\pi t^2 \cos(2\pi t), 2t) \\ &= 2t \cdot \underbrace{(\cos(2\pi t) - \pi t \sin(2\pi t), \sin(2\pi t) + \pi t \cos(2\pi t), 1)}_{=:v(t)} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \|v(t)\|^2 &= (\cos(2\pi t) - \pi t \sin(2\pi t))^2 + (\sin(2\pi t) + \pi t \cos(2\pi t))^2 + 1^2 \\ &= (\cos^2(2\pi t) - 2\pi t \cos(2\pi t) \sin(2\pi t) + \pi^2 t^2 \sin^2(2\pi t)) + \\ &\quad + (\sin^2(2\pi t) + 2\pi t \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) + \pi^2 t^2 \cos^2(2\pi t)) + 1 \\ &= (\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)) + \pi^2 t^2 (\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)) + 1 \\ &= 2 + \pi^2 t^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\|f'(t)\| = 2t \sqrt{2 + \pi^2 t^2}.$$

Folglich ist die Kurve f rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge ergibt sich unter Verwendung der Substitution

$$u = g(t) = 2 + \pi^2 t^2 \quad \text{mit} \quad \frac{du}{dt} = g'(t) = 2\pi^2 t, \quad \text{also} \quad du = 2\pi^2 t dt,$$

dann

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \|f'(t)\| dt = \int_0^1 2t \sqrt{2 + \pi^2 t^2} dt = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \sqrt{2 + \pi^2 t^2} (2\pi^2 t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{g(0)}^{g(1)} \sqrt{u} du = \frac{1}{\pi^2} \int_2^{2+\pi^2} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^{2+\pi^2} = \\ &= \frac{2}{3\pi^2} \left((2 + \pi^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3\pi^2} \left((2 + \pi^2) \sqrt{2 + \pi^2} - 2\sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

44. a) Die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = 2t - \sin t,$$

ist (als Differenz einer linearen Funktion und des Sinus) stetig und differenzierbar, und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi'(t) = 2 - \underbrace{\cos t}_{\leq 1} \geq 1 > 0;$$

damit ist φ streng monoton wachsend und bildet wegen $\varphi(-\pi) = -2\pi$ und $\varphi(\pi) = 2\pi$ das Intervall $[-\pi; \pi]$ bijektiv auf das Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ ab. Damit ist die gegebene Kurve

$$G = \{(\varphi(t); \psi(t)) \mid -\pi \leq t \leq \pi\}$$

mit $\varphi(t) = 2t - \sin t$ und $\psi(t) = 1 + \cos t$ für alle $t \in [-\pi; \pi]$ der Graph der Funktion

$$f : [-2\pi; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)).$$

b) Da $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = 2t - \sin t$, eine differenzierbare Funktion mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, ist ihre Umkehrfunktion φ^{-1} ebenfalls differenzierbar; ferner ist auch $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(t) = 1 + \cos t$, differenzierbar mit $\psi'(t) = -\sin t$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so daß nach der Kettenregel die Verknüpfung $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar ist, und für alle $x \in [-2\pi; 2\pi]$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \\ &= \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{-\sin t}{2 - \cos t} \quad \text{mit } x = \varphi(t). \end{aligned}$$

Wegen

$$\tan \alpha(t) = \frac{-\sin t}{2 - \cos t}$$

für alle $t \in [-\pi; \pi]$ wird der Winkel $\alpha(t)$ zwischen der x -Achse und der Kurventangente im Punkt $(\varphi(t); \psi(t))$ genau dann maximal, wenn

$$g(t) = \frac{-\sin t}{2 - \cos t}$$

maximal wird; dabei ist $g : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{(2 - \cos t) \cdot (-\cos t) - (-\sin t) \cdot \sin t}{(2 - \cos t)^2} = \\ &= \frac{-2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}{(2 - \cos t)^2} = \frac{1 - 2 \cos t}{(2 - \cos t)^2}. \end{aligned}$$

Wegen $g'(t) > 0$ für $\cos t < \frac{1}{2}$ ist g auf $[-\pi; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi]$ streng monoton wachsend, und wegen $g'(t) < 0$ für $\cos t > \frac{1}{2}$ ist g auf $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ streng monoton fallend; damit besitzt g in $t_1 = -\frac{\pi}{3}$ und $t_2 = \pi$ lokale Maxima mit

$$g(t_1) = \frac{-\sin(-\frac{\pi}{3})}{2 - \cos(-\frac{\pi}{3})} = \frac{-(-\frac{1}{2}\sqrt{3})}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und

$$g(t_2) = \frac{-\sin \pi}{2 - \cos \pi} = \frac{0}{2 - (-1)} = 0.$$

Folglich erhält man

$$\tan \alpha_{\max} = g(t_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{also} \quad \alpha_{\max} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ.$$

c) Für den Inhalt A_F der von G und der x -Achse eingeschlossenen Fläche

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2\pi \leq x \leq 2\pi \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

erhält man wegen $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [-2\pi; 2\pi]$ dann

$$\begin{aligned} A_F &= \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) dx = \int_{\varphi(-\pi)}^{\varphi(\pi)} f(x) dx \stackrel{x=\varphi(t)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) \varphi'(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t) (2 - \cos t) dt \\ &= 2 \cdot \int_0^{\pi} (2 + \cos t - \cos^2 t) dt = \int_0^{\pi} (4 + 2 \cos t - \underbrace{2 \cos^2 t}_{=1+\cos(2t)}) dt \\ &= \int_0^{\pi} (3 + 2 \cos t - \cos(2t)) dt = \left[3t + 2 \sin t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi} \\ &= \left(3\pi + 2 \sin \pi - \frac{\sin(2\pi)}{2} \right) - \left(3 \cdot 0 + 2 \sin 0 - \frac{\sin 0}{2} \right) = 3\pi. \end{aligned}$$