Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

37. Zum Zeitpunkt $t \geq 0$ beträgt der Abstand der Massenpunkte

$$M_1 = (a - v_1\,t;\ 0) \qquad \text{und} \qquad M_2 = (0;\ b - v_2\,t)$$

genau

$$d(t) = ||\,(a - v_1\,t;\ 0) - (0;\ b - v_2\,t)\,|| = \\ = ||\,(a - v_1\,t;\ -(b - v_2\,t))\,|| = \sqrt{(a - v_1\,t)^2 + (b - v_2\,t)^2},$$

der aufgrund des Monotonieverhaltens der Quadratwurzel genau dann minimal ist, wenn der Radikand

$$h(t) = (a - v_1\,t)^2 + (b - v_2\,t)^2$$

minimal ist. Wegen

$$h(t) = \left(a^2 - 2\,a\,v_1\,t + v_1^2\,t^2\right) + \left(b^2 - 2\,b\,v_2\,t + v_2^2\,t^2\right) = \\ = \left(v_1^2 + v_2^2\right)\,t^2 - 2\,(a\,v_1 + b\,v_2)\,t + \left(a^2 + b^2\right)$$

für alle $t \geq 0$ liegt der Graph G_h der Funktion $h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ auf einer wegen $v_1^2 + v_2^2 > 0$ nach oben geöffneten Parabel mit dem Scheitel in

$$t_0 = -\frac{-2\,(a\,v_1 + b\,v_2)}{2 \cdot (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{a\,v_1 + b\,v_2}{v_1^2 + v_2^2} > 0;$$

damit nimmt h an der Stelle t_0 das globale Minimum an mit

$$h(t_0) = \frac{(a\,v_1 + b\,v_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} - \frac{2\,(a\,v_1 + b\,v_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} + \left(a^2 + b^2\right) = \\ = \left(a^2 + b^2\right) - \frac{(a\,v_1 + b\,v_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{(a^2 + b^2)\,(v_1^2 + v_2^2) - (a\,v_1 + b\,v_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} = \\ = \frac{(a^2\,v_1^2 + a^2\,v_2^2 + b^2\,v_1^2 + b^2\,v_2^2) - (a^2\,v_1^2 + 2\,a\,v_1\,b\,v_2 + b^2\,v_2^2)}{v_1^2 + v_2^2} = \\ = \frac{a^2\,v_2^2 - 2\,a\,v_2\,b\,v_1 + b^2\,v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{(a\,v_2 - b\,v_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Das gesuchte Minimum $d_{\min}$ des Abstands von M_1 und M_2 ist also

$$d_{\min} = \sqrt{h(t_0)} = \sqrt{\frac{(a\,v_2 - b\,v_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{|a\,v_2 - b\,v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

38. a) Wegen

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{k}+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{2}{\sqrt{k}}} = \sqrt{2}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{k^2+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+\frac{1}{k}} = 0$$

gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = (\sqrt{2}; 0)$; insbesondere ist der Grenzwert $(\sqrt{2}; 0)$ auch der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

b) Die Zahlenfolge

$$(a_{k,1})_{k\in\mathbb{N}_0} = \left(\cos\tfrac{k\pi}{2}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$$

divergiert; insbesondere ist auch die Punktfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ divergent. Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt aber

$$a_{4j} = \left(1; (-1)^{4j}\frac{4j}{4j+1}\right) = \left(1; \frac{1}{1+\frac{1}{4j}}\right) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} (1; 1)$$

$$a_{4j+1} = \left(0; (-1)^{4j+1}\frac{4j+1}{4j+2}\right) = \left(0; -\frac{1+\frac{1}{4j}}{1+\frac{2}{4j}}\right) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} (0; -1)$$

$$a_{4j+2} = \left(-1; (-1)^{4j+2}\frac{4j+2}{4j+3}\right) = \left(-1; \frac{1+\frac{2}{4j}}{1+\frac{3}{4j}}\right) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} (-1; 1)$$

und

$$a_{4j+3} = \left(0; (-1)^{4j+3}\frac{4j+3}{4j+4}\right) = \left(0; -\frac{1+\frac{3}{4j}}{1+\frac{4}{4j}}\right) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} (0; -1);$$

damit besitzt die Punktfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die drei Häufungspunkte $(1; 1)$, $(0; -1)$ und $(-1; 1)$.

c) Wegen

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,1} = \lim_{k\to\infty} \cos \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0} = 1$$

und

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,2} = \lim_{k\to\infty} \left(k \sin\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = (1;\ 1)$; insbesondere ist der Grenzwert $(1;\ 1)$ auch der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

d) Wegen

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,1} = \lim_{k\to\infty} \left(\underbrace{k}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\cos\frac{1}{k}}_{\to 1}\right) = \infty$$

zeigt die Folge $(a_{k,1})_{k\in\mathbb{N}}$ eine bestimmte Divergenz nach $+\infty$; folglich divergiert auch die Punktfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Da darüber hinaus jede Teilfolge $(a_{k_j,1})_{j\in\mathbb{N}}$ divergiert, besitzt die Punktfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt.

39. Die Kurve

$$\gamma_a : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma_a(t) = (\cos t,\ \sin t,\ a\,t)\,,$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\gamma_a'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ a)$$

und damit

$$||\gamma_a'(t)|| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + a^2} = \sqrt{\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + a^2} = \sqrt{1 + a^2}$$

für alle $t \in [0; 2\pi]$; folglich ist γ_a rektifizierbar, und für ihre Länge L_a gilt

$$L_a = \int_0^{2\pi} ||\gamma_a'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+a^2}\, dt = \left[\sqrt{1+a^2} \cdot t\right]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{1+a^2}.$$

Damit ist

$$L_a \leq 7 \iff 2\pi\sqrt{1+a^2} \leq 7 \iff \sqrt{1+a^2} \leq \frac{7}{2\pi} \iff$$
$$\iff 1 + a^2 \leq \left(\frac{7}{2\pi}\right)^2 \iff a^2 \leq \frac{49}{4\pi^2} - 1 \iff a \leq \sqrt{\frac{49}{4\pi^2} - 1},$$

und man erhält

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{49}{4\pi^2} - 1};$$

folglich kann die Wendeltreppe bei ihrer einen Umdrehung von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ maximal einen Höhenunterschied von

$$h_{\max} = 2\pi \cdot a_{\max} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{49}{4\pi^2} - 1} = \sqrt{49 - 4\,\pi^2} \approx 3{,}09 \text{ m}$$

überwinden.

40. a) Die gegebene Kurve

$$\gamma : [1; 2] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(t^3 - 3t + 2,\ 12 - 3t^2\right),$$

mit den Koordinatenfunktionen

$$\gamma_1(t) = t^3 - 3t + 2 \qquad \text{und} \qquad \gamma_2(t) = 12 - 3t^2$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t),\ \gamma_2'(t)) = \left(3t^2 - 3,\ -6t\right)$$

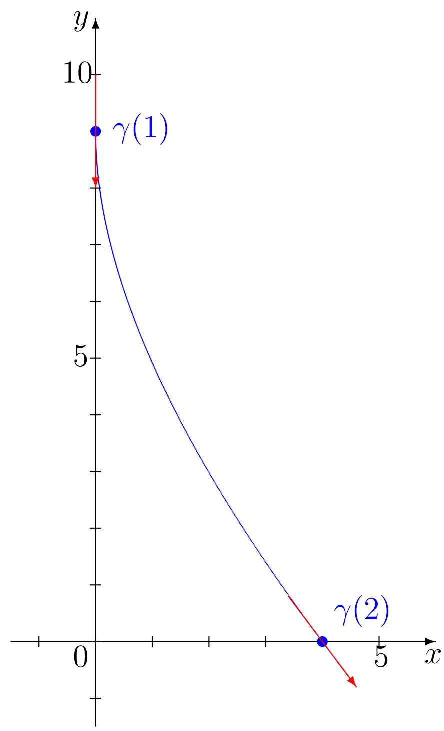
für alle $t \in [1; 2]$. Damit ergeben sich für $t = 1$ und $t = 2$ die Kurvenpunkte

$$\gamma(1) = (0, 9) \qquad \text{und} \qquad \gamma(2) = (4, 0)$$

mit den Tangentialvektoren

$$\gamma'(1) = (0, -6) \qquad \text{und} \qquad \gamma'(2) = (9, -12).$$

Damit ergibt sich für die Bildmenge $K = \{\gamma(t) \mid t \in [1; 2]\}$ folgende Skizze:



b) Wegen

$$\|\gamma'(t)\| = \left\|\left(3t^2-3,\ -6t\right)\right\| = 3\left\|\left(t^2-1,\ -2t\right)\right\| =$$
$$= 3\sqrt{\left(t^2-1\right)^2+(-2t)^2} = 3\sqrt{t^4-2t^2+1+4t^2} =$$
$$= 3\sqrt{t^4+2t^2+1} = 3\sqrt{\left(t^2+1\right)^2} = 3\left(t^2+1\right) = 3t^2+3,$$

für alle $t \in [1;2]$ ergibt sich für die gesuchte Bogenlänge L von K dann

$$L = \int_1^2 \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_1^2 \left(3t^2+3\right)dt = \Big[t^3+3t\Big]_1^2 = (8+6)-(1+3) = 10.$$