

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

33. a) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{n}} = \frac{\sqrt[n]{x^{2n}}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{x^2}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1} = x^2$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n}$ nach dem Wurzelkriterium für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Des weiteren ist für die verbleibenden $x \in \{-1, 1\}$ die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ als alternierende harmonische Reihe konvergent.

- b) Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist die Funktion

$$F : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \ln(t^2 + 1) dt,$$

differenzierbar mit $F'(x) = \ln(x^2 + 1)$ für alle $x \in [0; 1[$. Mit Hilfe der Reihenentwicklung des natürlichen Logarithmus

$$\ln(x + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

für alle $x \in]-1; 1]$ ergibt sich damit insbesondere für alle $x \in [0; 1[$

$$F'(x) = \ln(x^2 + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n}.$$

Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen darf die sogar auf $] -1; 1[$ konvergente Potenzreihe „gliedweise“ integriert werden, so daß wir

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) + c$$

für alle $x \in [0; 1[$ erhalten; dabei ergibt sich wegen

$$F(0) = \int_0^0 \ln(t^2 + 1) dt = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0$$

für die noch bestimmende Integrationskonstante $c = 0$. Demnach gilt

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$$

für alle $x \in [0; 1[$.

34. a) Die für den Parameter $a \neq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gegebene Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$ ist wegen

$$\frac{x^n}{a^{n+1}} = \frac{x^n}{a \cdot a^n} = \frac{1}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c q^n \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad q = \frac{x}{a}$$

und folglich wegen $c \neq 0$ genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$ gilt, also genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |a|$; in diesem Fall ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c q^n = \frac{c}{1-q} = \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{x}{a}} = \frac{a \cdot \frac{1}{a}}{a \cdot \left(1-\frac{x}{a}\right)} = \frac{1}{a-x}.$$

- b) Wir betrachten die gegebene Funktion

$$g : D_g \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)},$$

in ihrem maximalen Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ und bestimmen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{2+x} \quad \text{für alle } x \in D_g.$$

Wegen

$$\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{2+x} = \frac{\alpha(2+x) + \beta(1+x)}{(1+x)(2+x)} = \frac{(\alpha+\beta)x + (2\alpha+\beta)}{(1+x)(2+x)}$$

für alle $x \in D_g$ liefert der Koeffizientenvergleich

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{und} \quad 2\alpha + \beta = 1,$$

also $\alpha = 1$ und $\beta = -1$, und somit

$$g(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{-1}{2+x} \quad \text{für alle } x \in D_g.$$

Für die beiden Summanden ergibt sich zum einen mit Hilfe der Summenformel für geometrische Reihen

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{für alle } |x| < 1$$

und zum anderen unter Verwendung von Teilaufgabe a)

$$\frac{-1}{2+x} = \frac{1}{(-2)-x} \stackrel{a=-2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(-2)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} x^n \quad \text{für alle } |x| < 2,$$

so daß sich für $|x| < 1$ insgesamt

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{-1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n \end{aligned}$$

und damit für die Funktion g die Taylorreihe

$$T_g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{mit} \quad c_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

mit dem Entwicklungspunkt 0 ergibt. Da $T_g(x)$ für alle $|x| < 1$ konvergiert, gilt für den Konvergenzradius der Taylorreihe $\varrho \geq 1$; für $x = -1$ gilt

$$c_n x^n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \cdot (-1)^n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - 0 = 1,$$

so daß die Folge $(c_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder keine Nullfolge ist und folglich die Taylorreihe $T_g(-1)$ divergiert. Damit gilt auch $\varrho \leq 1$, insgesamt $\varrho = 1$.

35. a) Wir betrachten die gegebene Funktion

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{(1+x)(1-2x)},$$

auf ihrem maximalen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ und bestimmen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-2x} \quad \text{für alle } x \in D_f.$$

Wegen

$$\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-2x} = \frac{\alpha(1-2x) + \beta(1+x)}{(1+x)(1-2x)} = \frac{(-2\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta)}{(1+x)(1-2x)}$$

für alle $x \in D_f$ liefert der Koeffizientenvergleich

$$-2\alpha + \beta = 1 \quad \text{und} \quad \alpha + \beta = 0,$$

also $-3\alpha = 1$ bzw. $\alpha = -\frac{1}{3}$ und $3\beta = 1$ bzw. $\beta = \frac{1}{3}$, und somit

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{1+x} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2x} \quad \text{für alle } x \in D_f.$$

Für alle $c \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c q^n \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c q^n = \frac{c}{1-q};$$

damit ergibt sich für $c = -\frac{1}{3}$ und $q = -x$ zum einen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right) (-x)^n = \frac{-\frac{1}{3}}{1-(-x)} = \frac{-\frac{1}{3}}{1+x} \quad \text{für alle } |x| < 1$$

sowie für $c = \frac{1}{3}$ und $q = 2x$ zum anderen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} (2x)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-2x} \quad \text{für alle } |x| < \frac{1}{2}.$$

Damit erhält man für alle $|x| < \frac{1}{2}$ insgesamt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-\frac{1}{3}}{1+x} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right) (-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} (2x)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3} x^n, \end{aligned}$$

also die Potenzreihendarstellung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

- b) Die in a) ermittelte Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{2}$; folglich gilt für ihren Konvergenzradius ϱ zunächst $\varrho \geq \frac{1}{2}$. Für $x = \pm \frac{1}{2}$ ist die Folge $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder wegen

$$\begin{aligned} a_{2k} x^{2k} &= \frac{(-1)^{2k+1} + 2^{2k}}{3} \cdot \left(\pm \frac{1}{2}\right)^{2k} = \\ &= \frac{-1 + 2^{2k}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + 1^{2k}}{3} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{-0 + 1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

sicherlich keine Nullfolge und damit die Potenzreihe divergent; folglich gilt für ihren Konvergenzradius ϱ dann $\varrho \leq \frac{1}{2}$, insgesamt also $\varrho = \frac{1}{2}$, so daß die Potenzreihe auch für alle $|x| > \frac{1}{2}$ divergiert. Damit besitzt die Potenzreihe das Konvergenzintervall $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.

c) Für die in a) ermittelten Koeffizienten a_n der Potenzreihe gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(-1)^{0+1} + 2^0}{3} = \frac{(-1) + 1}{3} = 0 \\ a_1 &= \frac{(-1)^{1+1} + 2^1}{3} = \frac{1 + 2}{3} = 1 \end{aligned}$$

sowie die Rekursionsvorschrift

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 2a_n &= \frac{(-1)^{(n+1)+1} + 2^{n+1}}{3} + 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3} \\ &= \frac{-(-1)^{n+1} + 2^{n+1}}{3} + \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} + 2^{n+1}}{3} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} + 2 \cdot 2^{n+1}}{3} \\ &= \frac{(-1)^{(n+2)+1} + 2^{n+2}}{3} = a_{n+2} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

36. a) Zunächst ist die gegebene Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ \alpha & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

unabhängig von der Wahl des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ zumindest in allen Punkten $a \neq 0$ (als Quotient zweier stetiger Funktionen) stetig. Für den Punkt $a = 0$ ergibt eine zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2};$$

folglich ist f genau dann im Punkt $a = 0$ stetig und damit eine stetige Funktion, wenn $\alpha = f(0) = \frac{1}{2}$ gilt.

b) Mit Hilfe der Cosinusreihe ergibt sich zunächst für alle $x \neq 0$ die Potenzreihendarstellung

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right) = \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right) \right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}; \end{aligned}$$

diese ist wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} 0^{2n} = \frac{(-1)^0}{2!} 0^0 = \frac{1}{2} = f(0)$$

auch für den Punkt $x = 0$ gültig. Damit stellt die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ die Funktion f dar; diese ist damit nach dem Hauptsatz über Potenzreihen beliebig oft differenzierbar mit

$$f^{(2n)}(0) = (2n)! \cdot c_{2n} = (2n)! \cdot \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

und

$$f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! \cdot c_{2n+1} = (2n+1)! \cdot 0 = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.