MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 8
08.06.2016

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

29. a) Die gegebene Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a=1$ sowie die Koeffizienten $c_n=(-1)^n(n+1)$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{(-1)^n(n+1)}\right|=\frac{n+2}{n+1}=\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1=c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho=\frac{1}{1}=1$; damit ist diese für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-1|<1$ konvergent sowie für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-1|>1$ divergent. Für die verbleibenden Punkte $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-1|=1$ gilt

$$|(-1)^n(n+1)(x-1)^n|=|(-1)^n|\,(n+1)\,|x-1|^n=n+1\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty,$$

weswegen die Folge $((-1)^n(n+1)(x-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder keine Nullfolge und folglich die Potenzreihe divergent ist. Insgesamt ergibt sich wegen

$$|x-1|<1\iff -1<x-1<1\iff 0<x<2$$

das Konvergenzintervall $]0;2[$ für die gegebene Potenzreihe.

b) Durch die gegebene Potenzreihe wird gemäß a) die Funktion

$$f:\,]0;2[\,\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n,$$

definiert; nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist f stetig, insbesondere also integrierbar, und die gliedweise integrierte Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{n+1}$$

stellt eine Stammfunktion von f dar; damit ergibt sich

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(t-1)^{n+1}\right]_1^x=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{n+1}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 0^{n+1}}_{=0}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{n+1}$$

für alle $x\in\,]0;2[$.

c) Für alle $x \in \,]0;2[$ gilt unter Verwendung der geometrischen Summenformel

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n = \frac{c}{1-q}$$

für $c = x-1$ und $q = 1-x$ mit $|q| = |1-x| < 1$ zunächst

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \,(x-1) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)(1-x)^n = \frac{x-1}{1-(1-x)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

und damit dann mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential– und Integralrechnung

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

30. a) Bei der zu untersuchenden Reihe

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}\, x^n$$

handelt es sich um eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $a = 0$ mit den Koeffizienten $c_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}{(-1)^n}\right| = \left|\frac{(-1)\cdot\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+2}}\right| =$$
$$= \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+2}} = \sqrt[3]{\frac{n}{n+2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt[3]{\frac{1}{1+0}} = \sqrt[3]{1} = 1 = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 1$; damit ist sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Für die beiden noch verbleibenden Punkte $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$ gilt:

- Für $x = -1$ ergibt sich

$$S_0(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-(-1))^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}};$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dabei

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n},$$

so daß $S_0(-1)$ die divergente Minorante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n}$ besitzt und daher nach dem Minorantenkriterium selbst divergent ist.

- Für $x = 1$ ergibt sich

$$S_0(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}};$$

da $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ist $S_0(1)$ nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium für alternierende Reihen konvergent.

b) Durch gliedweises Differenzieren der Summanden von $S_0(x)$ ergibt sich die Potenzreihe

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} \cdot n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}\, x^n$$

um den Punkt $a = 0$ mit den Koeffizienten $c_n' = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; sie besitzt denselben Konvergenzradius $\varrho = 1$ wie $S_0(x)$; damit ist auch sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Ferner gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}\, x^n\right| = \frac{n+1}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}\,|x|^n = \frac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}} =$$
$$= \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n+2}} \cdot \sqrt[3]{n+1} = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{n+1}}_{\to\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty;$$

damit bilden die Reihenglieder von $S_1(x)$ insbesondere keine Nullfolge, weswegen die Reihe $S_1(x)$ nicht konvergieren kann.

c) Gemäß a) ist $I_0 = \,]-1;1] \subseteq \mathbb{R}$ das Konvergenzintervall der Potenzreihe S_0; diese definiert daher die Funktion

$$f : \,]-1;1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = S_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}\, x^n.$$

Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist f eine auf dem offenen Intervall $]-1;1[$ beliebig oft differenzierbare Funktion, und für alle $x \in \,]-1;1[$ erhält man durch gliedweises Differenzieren von $S_0(x)$ eine Potenzreihendarstellung von f', damit gilt also $f'(x) = S_1(x)$; für $x = 1$ ist $S_1(1)$ nicht konvergent.

31. a) Die gegebene Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)}$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten $c_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n\,(n-1)}{(n+1)\,n} = \frac{n-1}{n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1-0}{1+0} = 1 = c$$

gilt für den Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe $\varrho = \frac{1}{c} = 1$; damit ist die Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Ferner gilt für $x \in \{-1; 1\}$

$$|c_n\, x^n| = |c_n| = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$; damit besitzt in diesem Fall die Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, x^n$ die konvergente Majorante $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

b) Da die Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)}$ gemäß a) den Konvergenzradius $\varrho = 1$ besitzt, definiert sie die beliebig oft differenzierbare Funktion

$$f :]-1;1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)},$$

mit

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n\, x^{n-1}}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n-1}}{n-1}$$

sowie

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n-1)\, x^{n-2}}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n-2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Daneben betrachten wir die ebenfalls beliebig oft differenzierbare Funktion

$$g :]-1;1[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = -x + (1+x)\, \ln(1+x),$$

und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} g'(x) = -1 + \left(1 \cdot \ln(1+x) + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x}\right) &= \\ = -1 + \ln(1+x) + 1 &= \ln(1+x) \end{aligned}$$

sowie

$$g''(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt demnach

$$\begin{aligned} f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-x)^{n-2} &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} &= g''(x) \end{aligned}$$

und folglich $f'(x) = g'(x) + c_1$ mit einer geeigneten Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$; speziell im Entwicklungspunkt $a = 0$ ergibt sich $f'(0) = 0$ sowie $g'(0) = \ln 1 = 0$ und damit $c_1 = 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt also $f'(x) = g'(x)$ und folglich $f(x) = g(x) + c_0$ mit einer geeigneten Konstante $c_0 \in \mathbb{R}$; speziell im Entwicklungspunkt $a = 0$ ergibt sich $f(0) = 0$ sowie $g(0) = \ln 1 = 0$ und damit auch $c_0 = 0$. Insgesamt erhält man also

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)} = f(x) = g(x) = -x + (1+x)\,\ln(1+x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

32. a) Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

differenzierbar mit $F'(x) = e^{-x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

ergibt sich damit

$$F'(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n}.$$

Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen darf die auf $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe „gliedweise“ integriert werden, so daß wir

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\, x^{2n+1} + c$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erhalten; dabei ergibt sich wegen

$$F(0) = \int_0^0 e^{-t^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} \cdot 0^{2n+1} = 0$$

für die noch bestimmende Integrationskonstante $c = 0$. Demnach gilt

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\, x^{2n+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Die in a) ermittelte Potenzreihendarstellung für die Funktion F stimmt mit der Taylorreihe T_F von F überein; damit ist

$$F(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{T_1(x)=T_2(x)} - \frac{1}{3}\, x^3}_{T_3(x)=T_4(x)} + \frac{1}{10}\, x^5}_{T_5(x)=T_6(x)} - \frac{1}{42}\, x^7}_{T_7(x)=T_8(x)} \pm \cdots$$

wobei T_n das n–te Taylorpolynom von F zum Entwicklungspunkt 0 sei. Für $x = 1$ ergibt sich demnach

$$F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} \cdot 1^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)},$$

also die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{n!\,(2n+1)} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

da nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ließe sich die Konvergenz dieser Reihe mit dem Leibnizkriterium nachweisen. Für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ ergibt sich damit, daß

- die Teilfolge $(s_{2m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend sowie
- die Teilfolge $(s_{2m+1})_{m\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend ist;

damit folgt aber für die Summe s der Reihe, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$

- einerseits s zwischen s_n und s_{n+1} sowie
- andererseits s_{n+2} zwischen s_n und s

liegt, woraus man

$$a_{n+1} - a_{n+2} = |s_{n+2} - s_n| \le |s - s_n| \le |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}$$

erhält. Wegen

$$|s - s_2| \le a_3 = \frac{1}{42} < \frac{1}{40}$$

und

$$|s - s_1| \ge a_2 - a_3 = \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{8}{105} \ge \frac{1}{40}$$

ist

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}\, x^{2k+1} = x - \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{1}{10}\, x^5 = T_5(x)$$

das gesuchte Taylorpolynom.