MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 7
01.06.2016

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

25. a) Die gegebene Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\,x^n$$

besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)} \neq 0 \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3^{n+1}}\,(5\,(n+1)^2+1)} \cdot \frac{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}{(-1)^n}\right| =$$

$$= \left|(-1)\cdot\frac{\sqrt{3^n}}{\sqrt{3^{n+1}}}\cdot\frac{5\,n^2+1}{5\,(n+1)^2+1}\right| = \sqrt{\frac{3^n}{3^{n+1}}}\cdot\frac{5\,n^2+1}{5\,n^2\,(1+\frac{1}{n})^2+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\frac{5+\frac{1}{n^2}}{5\,(1+\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\frac{5+0}{5\,(1+0)^2+0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = c$$

ergibt sich als Konvergenzradius der gegebenen Potenzreihe $r = \frac{1}{c} = \sqrt{3}$.

b) Wir betrachten die gegebene Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\,x^n \qquad \text{für} \qquad x = \pm\sqrt{3}$$

und erhalten

$$\left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\,x^n\right| = \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\,|x|^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}^{\,n}\,(5\,n^2+1)}\,\sqrt{3}^{\,n} = \frac{1}{5\,n^2+1} \leq \frac{1}{5\,n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; damit besitzt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\,x^n$ die (bekanntlich konvergente) Majorante $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium (absolut) konvergent, so daß auch die gegebene Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\,x^n$ für $x = \pm\sqrt{3}$ (absolut) konvergiert.

26. a) Wir weisen die Konvergenz der durch

$$a_1 = 4 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach, indem wir zeigen, daß sie monoton fallend und nach unten beschränkt ist; hierfür beweisen wir $0 \le a_{n+1} \le a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“: Es ist $a_1 = 4$ und $a_2 = \sqrt{6+4} = \sqrt{10}$ und damit $0 \le a_2 \le a_1$.

„$n \to n+1$“: Aus der Induktionsvoraussetzung

$$0 \le a_{n+1} \le a_n$$

folgt zunächst

$$6 \le 6 + a_{n+1} \le 6 + a_n,$$

und man erhält wegen der Monotonie der Quadratwurzel

$$\sqrt{6} \le \sqrt{6 + a_{n+1}} \le \sqrt{6 + a_n},$$

insbesondere also die Induktionsbehauptung

$$0 \le a_{n+2} \le a_{n+1}.$$

Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ergibt sich mit Hilfe der Rekursionsvorschrift unter Verwendung der Stetigkeit der Quadratwurzel

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{6 + a}$$

und damit $a^2 = 6 + a$ bzw. $a^2 - a - 6 = 0$, also

$$a = \frac{1}{2}\left(-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-6)}\right) = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

und damit $a = -2$ oder $a = 3$; wegen $a_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $a \ge 0$, woraus sich schließlich $a = 3$ ergibt.

b) Die gegebene Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}}\, x^n$$

besitzt den Entwicklungspunkt 0 sowie die Koeffizienten $c_n = \dfrac{a_n^n}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gemäß a) ist $a_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$, so daß sich unter Verwendung des klassischen Grenzwerts $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ sowie der Stetigkeit der Quadratwurzel

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{a_n^n}{\sqrt{n}}\right|} = \sqrt[n]{\frac{a_n^n}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a_n^n}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{a_n}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{\sqrt{1}} = 3 = c$$

ergibt; folglich besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$.

c) Zur Untersuchung, ob die Potenzreihe in $x = \frac{1}{3}$ konvergiert, ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

zu betrachten. Gemäß a) ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und besitzt den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$, so daß sich sogar $a_n \geq 3$ und folglich

$$\left(\frac{a_n}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \left(\frac{3}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = 1^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt; damit besitzt die zu untersuchende Reihe die (bekanntermaßen divergente) Minorante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

27. Die gegebenen Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

haben jeweils den Entwicklungspunkt 0 sowie die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

a) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|a|}{|a|} = 1;$$

folglich besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho\frac{1}{1} = 1$ und ist damit insbesondere für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Für $|x| = 1$ ergibt sich

$$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x|^n = |a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a| \neq 0;$$

damit ist die Folge $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder keine Nullfolge und folglich die Potenzreihe divergent. Insgesamt konvergiert in diesem Fall die Potenzreihe genau für alle $x \in \,]-1, 1[$.

b) Konvergiert die Folge $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n^2 a_n \neq 0$ und damit auch $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^2 a_{n+1}}{n^2 a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{|(n+1)^2 a_{n+1}|}{|n^2 a_n|} =$$
$$= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{|(n+1)^2 a_{n+1}|}{|n^2 a_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1+0)^2} \cdot \frac{|a|}{|a|} = 1;$$

folglich besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{1} = 1$ und ist damit insbesondere für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Für $|x| = 1$ ergibt sich

$$n^2 \cdot |a_n x^n| = \left|n^2 a_n\right| \cdot |x|^n = \left|n^2 a_n\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a| > 0;$$

damit gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_1$ dann

$$n^2 \cdot |a_n x^n| \leq 2\,|a|\,, \qquad \text{also} \qquad |a_n x^n| \leq \frac{2\,|a|}{n^2}$$

gilt. Damit besitzt die Reihe $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty} a_n x^n$ die (bekanntlich konvergente) Reihe $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty} \frac{2\,|a|}{n^2}$ als Majorante und ist nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent, also konvergiert auch die gegebene Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Insgesamt konvergiert in diesem Fall die Potenzreihe genau für alle $x \in [-1, 1]$.

c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge, so ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, \qquad \text{also die Potenzreihe} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für} \quad x = -1,$$

nach dem Leibnizkriterium konvergent; folglich gilt für ihren Konvergenzradius zunächst $\varrho \geq 1$. Wegen $a_n \geq \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ besitzt die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \text{also die Potenzreihe} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für} \quad x = 1,$$

die (bekanntlich divergente) harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ als Minorante und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent, also divergiert auch die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x = 1$; folglich gilt für den Konvergenzradius zudem $\varrho \leq 1$. Insgesamt ergibt sich der Konvergenzradius $\varrho = 1$, und die Potenzreihe konvergiert genau für alle $x \in [-1; 1[$.

28. Jede der gegebenen Funktionen

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x,$$

und

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$

läßt sich auf unterschiedlichen Wegen in ihre Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $a = 2$ entwickeln. Zum einen kann zunächst unter Berechnung aller Ableitungen von exp bzw. f die Taylorreihe nach Definition als

$$T_{\exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{bzw.} \qquad T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

aufgestellt und dann ihr Konvergenzbereich bestimmt werden:

- Wegen
$$\exp^{(n)}(x) = e^x \qquad \text{und damit} \qquad \exp^{(n)}(2) = e^2$$
für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist
$$T_{\exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$
die Taylorreihe der Exponentialfunktion exp zum Entwicklungspunkt $a = 2$; diese Potenzreihe mit den Koeffizienten $c_n = \frac{e^2}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt wegen
$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{e^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^2}\right| = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
den Konvergenzradius $\varrho = +\infty$; damit ist die Taylorreihe $T_{\exp}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt die n–te Ableitung von f die Gestalt
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$$
für alle $x \in \mathbb{R}^+$; wir weisen dies mit Hilfe vollständiger Induktion nach:
Für „$n = 0$“ ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}^+$
$$(-1)^0 \cdot 0! \cdot x^{-(0+1)} = x^{-1} = \frac{1}{x} = f(x) = f^{(0)}(x).$$
Für „$n \to n+1$“ ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}^+$
$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) \underset{\text{Ind.-vor.}}{=} \left((-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}\right)' =$$
$$= (-1)^n \cdot n! \cdot \left(-(n+1) \cdot x^{-(n+1)-1}\right) = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot x^{-(n+2)}.$$
Damit ist
$$f^{(n)}(2) = (-1)^n \cdot n! \cdot 2^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n\, n!}{2^{n+1}}$$
für alle $n \in \mathbb{N}_0$, weswegen
$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$$
die Taylorreihe der Funktion f zum Entwicklungspunkt $a = 2$ ist; diese Potenzreihe mit den Koeffizienten $c_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt wegen
$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{(-1)^n}\right| = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = c$$
den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 2$. Damit ist die Taylorreihe $T_f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < 2$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| > 2$

divergent; für die $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| = 2$ ist die Folge $\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder wegen

$$\left|\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\right| = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot |x-2|^n = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2^n = \frac{1}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ keine Nullfolge und damit die Taylorreihe divergent. Insgesamt ergibt sich wegen

$$|x-2| < 2 \iff -2 < x-2 < 2 \iff 0 < x < 4$$

das Konvergenzintervall $]0;4[$ der Taylorreihe.

Zum anderen kann der Funktionsterm von exp bzw. f in eine Potenzreihe um den Punkt $a = 2$ entwickelt werden, welche dann mit der Taylorreihe $T_{\exp}(x)$ bzw. $T_f(x)$ zum Entwicklungspunkt $a = 2$ übereinstimmt:

- Unter Verwendung der Exponentialreihe erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\exp(x) = \exp(2+(x-2)) = e^2 \exp(x-2) = \\ = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n;\end{aligned}$$

  damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

  die Taylorreihe der Exponentialfunktion exp an der Stelle $a = 2$, und diese konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ gegen exp.

- Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x-2}{2}\right)},$$

  und unter Verwendung der für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1$, also für $x \in]0;4[$ konvergenten geometrischen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = -\frac{x-2}{2}$ ergibt sich damit

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n;$$

  damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$$

  die Taylorreihe der Funktion f an der Stelle $a = 2$, und diese konvergiert auf $]0;4[$ gegen f.