

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

21. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^2),$$

ist als Hintereinanderausführung von Sinus und der Quadratfunktion beliebig oft differenzierbar, und unter Verwendung der Kettenregel sowie (für die höheren Ableitungen) der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot (2x) = 2x \cdot \cos(x^2)$$

und

$$f''(x) = 2 \cdot \cos(x^2) + 2x \cdot (-\sin(x^2) \cdot (2x)) = 2 \cos(x^2) - 4x^2 \cdot \sin(x^2)$$

sowie (für die bei b) benötigte Restglieddarstellung)

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2(-\sin(x^2) \cdot (2x)) - (8x \cdot \sin(x^2) + 4x^2 \cdot (\cos(x^2) \cdot (2x))) \\ &= -4x \cdot \sin(x^2) - (8x \cdot \sin(x^2) + 8x^3 \cdot \cos(x^2)) \\ &= -12x \cdot \sin(x^2) - 8x^3 \cdot \cos(x^2) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(0) = 2,$$

und man erhält für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und x mit $R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$ gibt; es ist damit

$$f(x) - T_2(x) = R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3.$$

Speziell für $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gilt auch $\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, und wir erhalten in

$$\begin{aligned}
 |f(x) - T_2(x)| &= |R_3(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3 \right| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot |x^3| \\
 &= \frac{1}{6} \cdot |-12\xi \cdot \sin(\xi^2) - 8\xi^3 \cdot \cos(\xi^2)| \cdot |x|^3 \\
 &\leq \frac{1}{6} \cdot \left(12 \cdot \underbrace{|\xi|}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{|\sin(\xi^2)|}_{\leq 1} + 8 \cdot \underbrace{|\xi|^3}_{\leq (\frac{1}{2})^3} \cdot \underbrace{|\cos(\xi^2)|}_{\leq 1} \right) \cdot \underbrace{|x|^3}_{\leq (\frac{1}{2})^3} \\
 &\leq \frac{1}{6} \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 \right) \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot \underbrace{\frac{1}{8}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

die Behauptung.

22. a) Die gegebene Funktion

$$f:]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x},$$

ist (als gebrochenrationale Funktion) beliebig oft stetig differenzierbar, und für alle $x > -1$ gilt

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= (-2) \cdot (1+x)^{-3}, \\
 f'''(x) &= (-2)(-3) \cdot (1+x)^{-4}, \\
 f^{(4)}(x) &= (-2)(-3)(-4) \cdot (1+x)^{-5},
 \end{aligned}$$

wodurch die Vermutung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

nahegelegt wird; diese bestätigen wir mittels vollständiger Induktion:

- Für den Induktionsanfang „ $n = 1$ “ ergibt sich

$$f'(x) = (1+x)^{-2} = (-1)^{1-1} \cdot 1! \cdot (1+x)^{-(1+1)}.$$

- Für den Induktionsschritt „ $n \rightarrow n+1$ “ erhält man aus der Induktionsvoraussetzung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)}$$

wegen

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\
 &= (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot (-(n+1) \cdot (1+x)^{-(n+1)-1}) \\
 &= (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot ((-1) \cdot (n+1) \cdot (1+x)^{-((n+1)+1)}) \\
 &= (-1)^{(n+1)-1} \cdot (n+1)! \cdot (1+x)^{-((n+1)+1)}
 \end{aligned}$$

die Induktionsbehauptung.

b) Für den Entwicklungspunkt $a = 2$ ergibt sich

$$f(2) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

sowie mit den in a) ermittelten Ableitungen

$$f'(2) = (1+2)^{-2} = \frac{1}{9} \quad \text{und} \quad f''(2) = (-2) \cdot (1+2)^{-3} = -\frac{2}{27};$$

für das zweite Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ erhält man damit

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(2) + f'(2) \cdot (x-2) + \frac{f''(2)}{2} \cdot (x-2)^2 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{9}(x-2) - \frac{1}{27}(x-2)^2 \end{aligned}$$

für alle $x > -1$.

c) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x > -1$, wobei es zu jedem $x > -1$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes $R_3(x)$ ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 2$ und x mit

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-2)^3$$

gibt; für alle $x \in [1, 3]$ gilt $|x-2| \leq 1$ und damit auch $|\xi-2| \leq 1$, insbesondere also $\xi \geq 1$, und wir erhalten

$$|f'''(\xi)| = |6 \cdot (1+\xi)^{-4}| = 6 \cdot \underbrace{(1+\xi)^{-4}}_{\geq 2} \leq 6 \cdot 2^{-4} = \frac{6}{16}$$

und damit

$$\begin{aligned} |f(x) - T_2(x)| &= |R_3(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-2)^3 \right| = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \underbrace{|f'''(\xi)|}_{\leq \frac{6}{16}} \cdot \underbrace{|x-2|^3}_{\leq 1} \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{16} \cdot 1^3 = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

23. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sin x$, ist als Produkt der Exponentialfunktion und des Sinus beliebig oft differenzierbar; mit Hilfe der Produktregel erhält man

- $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$,
- $f''(x) = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$,
- $f'''(x) = 2e^x \cos x + 2e^x (-\sin x) = 2e^x (\cos x - \sin x)$,
- $f^{(4)}(x) = 2e^x (\cos x - \sin x) + 2e^x (-\sin x - \cos x) = -4e^x \sin x$ und
- $f^{(5)}(x) = -4e^x \sin x - 4e^x \cos x = -4e^x (\sin x + \cos x)$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 2 \quad \text{und} \quad f^{(4)}(0) = 0$$

ergibt sich für das vierte Taylorpolynom T_4 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Taylorformel gilt nun $f(x) = T_4(x) + R_5(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ_x zwischen $a = 0$ und x mit $R_5(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}x^5$ gibt. Für $x \neq 0$ erhält man damit

$$\frac{f(x) - T_4(x)}{x^4} = \frac{R_5(x)}{x^4} = \left(\frac{f^{(5)}(\xi_x)}{120} x^5 \right) \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{x}{120} \cdot f^{(5)}(\xi_x);$$

beim Grenzübergang $x \rightarrow 0$ ergibt sich auch $\xi_x \rightarrow 0$, woraus wegen der Stetigkeit der fünften Ableitung $f^{(5)}$ dann $f^{(5)}(\xi_x) \rightarrow f^{(5)}(0) = -4$ folgt. Insgesamt erhält man also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - T_4(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{x}{120}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{f^{(5)}(\xi_x)}_{\rightarrow -4} \right) = 0 \cdot (-4) = 0.$$

Wir können also $p = T_4$ wählen. Des weiteren gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - T_4(x)| &= |R_5(x)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!} x^5 \right| = |-4 e^{\xi_x} (\sin \xi_x + \cos \xi_x)| \cdot \frac{|x|^5}{120} \leq \\ &\leq 4 e^{\xi_x} \left(\underbrace{|\sin \xi_x|}_{\leq 1} + \underbrace{|\cos \xi_x|}_{\leq 1} \right) \cdot \frac{|x|^5}{120} \stackrel{\xi_x \leq \frac{1}{2}}{\leq} 8 e^{\xi_x} \cdot \frac{|x|^5}{120} \stackrel{|x| \leq \frac{1}{2}}{\leq} 8 e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120} = \frac{\sqrt{e}}{480} \end{aligned}$$

für alle $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; dabei geht ein, daß die Exponentialfunktion monoton wächst.

24. a) Für $x \in [0, \pi]$ betrachten wir das dritte Taylorpolynom T_3 des Sinus zum Entwicklungspunkt $a = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \sin 0 + \sin' 0 \cdot x + \frac{\sin'' 0}{2} \cdot x^2 + \frac{\sin''' 0}{6} \cdot x^3 \\ &= \sin 0 + \cos 0 \cdot x + \frac{-\sin 0}{2} \cdot x^2 + \frac{-\cos 0}{6} \cdot x^3 \stackrel{\substack{\sin 0=0 \\ \cos 0=1}}{=} x - \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

Nach der Taylorformel gilt nun $\sin x = T_3(x) + R_4(x)$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen $a = 0$ und x mit

$$R_4(x) = \frac{\sin^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x^4 = \frac{\sin \xi}{4!} \cdot x^4$$

gibt; wegen $x \in [0, \pi]$ ist auch $\xi \in [0, \pi]$, und wegen $\sin \xi \geq 0$ ergibt sich

$$\sin x = T_3(x) + R_4(x) = T_3(x) + \underbrace{\frac{\sin \xi}{4!} \cdot x^4}_{\geq 0} \geq T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

b) Die Polynomfunktion

$$p : [\pi, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = x - \frac{x^3}{6},$$

ist differenzierbar, und für alle $x \geq \pi$ gilt

$$p'(x) = 1 - \frac{3x^2}{6} = 1 - \frac{x^2}{2} \underset{x \geq \pi \geq 3}{\leq} 1 - \frac{3^2}{2} = -\frac{7}{2} \leq 0;$$

damit ist p auf dem Intervall $[\pi, +\infty[$ monoton fallend, und für alle $x > \pi$ ergibt sich

$$p(x) \leq p(\pi) = \pi - \frac{\pi^3}{6} \underset{\pi \geq 3}{\leq} \pi - \frac{3^3}{6} \underset{\pi \leq \frac{7}{2}}{\leq} \frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -1,$$

insbesondere also

$$\sin x \geq -1 \geq p(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$