Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

17. Wir betrachten die gebrochenrationale Funktion

$$\varphi :]0,3[\to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \pi \, \frac{3x-3}{3x-x^2},$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \pi \cdot \frac{3x-3}{x\cdot(3-x)} = \pi \cdot \frac{2x+(x-3)}{x\cdot(3-x)} = \pi \cdot \frac{2x-(3-x)}{x\cdot(3-x)} = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{2x}{x\cdot(3-x)} - \frac{3-x}{x\cdot(3-x)} \right) = \pi \cdot \left(\frac{2}{3-x} - \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

für alle $x \in]0,3[$, insbesondere also

$$\varphi(1) = \pi \cdot \left(\frac{2}{3-1} - \frac{1}{1} \right) = 0 \qquad \text{und} \qquad \varphi(2) = \pi \cdot \left(\frac{2}{3-2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3\,\pi}{2};$$

die Funktion φ ist stetig differenzierbar, und für alle $x \in]0,3[$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \pi \cdot \left(-\frac{2}{(3-x)^2} \cdot (-1) - \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{2}{(3-x)^2} + \frac{1}{x^2} \right) = \pi \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2-6x+9} \right). \end{aligned}$$

Für das zu berechnende Integral ergibt sich mit der Substitutionsregel $(*)$ im Hinblick auf die Stetigkeit des Cosinus

$$\begin{aligned} &\int_1^2 \cos\left(\pi \, \frac{3x-3}{3x-x^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2-6x+9} \right) dx = \\ &\quad = \int_1^2 \cos(\varphi(x)) \cdot \frac{\varphi'(x)}{\pi} \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_1^2 \cos(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx \underset{(*)}{=} \\ &\quad = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} \cos u \, du = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos u \, du = \frac{1}{\pi} \cdot \Big[\sin u \Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \\ &\quad = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{1}{\pi} \cdot ((-1) - 0) = -\frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

18. Die zu betrachtenden bestimmten Integrale

$$\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{und} \qquad \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2}$$

besitzen unterschiedliche Integrationsgrenzen, wodurch die Anwendung der Substitutionsregel nahegelegt wird. Mit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

und der Substitution

$$g :]0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad g(t) = \frac{1}{t},$$

mit

$$g'(t) = -\frac{1}{t^2} \qquad \text{für alle} \qquad t \in]0,\infty[$$

erhält man

$$\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{g(1)}^{g(a)} f(x)\,dx = \int_1^a f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt =$$

$$= \int_1^a \frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt = -\int_1^a \frac{1}{t^2+1}\,dt = \int_a^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

und damit die zu zeigende Gleichheit

$$\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Unter Verwendung der Stammfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f ergibt sich damit

$$\big[\arctan x\big]_a^1 = \big[\arctan\big]_1^{\frac{1}{a}},$$

also

$$\arctan 1 - \arctan a = \arctan\frac{1}{a} - \arctan 1,$$

woraus sich wegen $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ die Funktionalgleichung des Arcus tangens

$$\arctan\frac{1}{a} + \arctan a = \frac{\pi}{2}.$$

ergibt.

19. a) Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \underbrace{x^{-\frac{1}{2}}}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{u(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}_{v(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{u(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}_{v(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\,\ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x}\,\ln x - 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= 2\sqrt{x}\,\ln x - 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}\,(\ln x - 2) + C.$$

Für alle $0 < \alpha < e$ gilt damit

$$\int_\alpha^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\,(\ln x - 2)\right]_\alpha^e = 2\sqrt{e}\,(\ln e - 2) - 2\sqrt{\alpha}\,(\ln\alpha - 2)\,,$$

wobei sich mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{\alpha\to 0+} \sqrt{\alpha}\,(\ln\alpha - 2) = \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\ln\alpha - 2}{\alpha^{-\frac{1}{2}}} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}}$$

$$= \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{\alpha\to 0+} \left(-2\sqrt{\alpha}\right) = 0$$

ergibt. Folglich existiert das uneigentliche Integral 2. Art

$$\int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha\to 0+} \int_\alpha^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \underbrace{2\sqrt{e}\,(\underbrace{\ln e}_{=1} - 2)}_{=-1} - 2\cdot \underbrace{\lim_{\alpha\to 0+} \sqrt{\alpha}\,(\ln\alpha - 2)}_{=0} = -2\sqrt{e}.$$

Dagegen existiert das uneigentliche Integral 1. Art $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ wegen

$$\int_e^b \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\,(\ln x - 2)\right]_e^b =$$

$$= 2\underbrace{\sqrt{b}}_{\to\infty}\cdot\left(\underbrace{\ln b}_{\to\infty} - 2\right) - 2\sqrt{e}\,(\ln e - 2) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

nicht.

b) Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\int e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \int \underbrace{e^x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}_{u(x)} dx - \int \frac{e^x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}_{u(x)} - \int \underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}_{u'(x)} dx - \int \frac{e^x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) + \int \frac{e^x}{1+x^2}\,dx - \int \frac{e^x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) + C$$

Für alle $0 < b$ gilt damit

$$\int_0^b e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \left[e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)\right]_0^b =$$

$$= e^b \left(\frac{\pi}{2} - \arctan b\right) - e^0 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 0\right) = e^b \left(\frac{\pi}{2} - \arctan b\right) - \frac{\pi}{2},$$

wobei sich mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{b\to\infty} e^b\left(\frac{\pi}{2}-\arctan b\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan b}{e^{-b}} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{b\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+b^2}}{-e^{-b}} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{e^b}{1+b^2} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{b\to\infty}\frac{e^b}{2b} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{b\to\infty}\frac{e^b}{2} = \infty$$

ergibt. Folglich existiert das uneigentliche Integral 1. Art

$$\int_0^\infty e^x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \underbrace{\lim_{b\to\infty} e^b\left(\frac{\pi}{2}-\arctan b\right)}_{=\infty} - \frac{\pi}{2} = \infty$$

und damit insbesondere auch $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$ nicht.

20. a) Die gegebene Funktion

$$f:[2,\infty[\,\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{\ln x}{x^2}=x^{-2}\cdot\ln x,$$

ist (als Produkt einer Potenzfunktion und des natürlichen Logarithmus) stetig und (beliebig oft) differenzierbar, und für alle $x\in[2;\infty[$ gilt

$$f'(x) = (-2)\,x^{-3}\cdot\ln x + x^{-2}\cdot\frac{1}{x} = -\underbrace{x^{-3}}_{>0}\underbrace{\left(\underbrace{2\ln x}_{\geq 2\ln 2>1}-1\right)}_{>0} < 0;$$

damit ist die auf dem Intervall $[2;\infty[$ definierte Funktion f (sogar streng) monoton fallend. Da darüber hinaus

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$$

gilt, nimmt f nur positive Funktionswerte an.

b) Es ist

$$\int f(x)\,dx = \int \underbrace{x^{-2}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\ln x}_{v(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^{-1}}{-1}}_{u(x)}\cdot\underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int\underbrace{\frac{x^{-1}}{-1}}_{u(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx =$$

$$= -x^{-1}\ln x + \int x^{-2}\,dx = -x^{-1}\ln x + \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{\ln x + 1}{x} + C;$$

damit ist etwa

$$F:[2;\infty[\,\to\mathbb{R},\quad F(x) = -\frac{\ln x+1}{x},$$

eine Stammfunktion von f.

c) Gemäß a) ist die gegebene Funktion $f : [2, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig und monoton fallend mit nur positiven Funktionswerten; nach dem Integralvergleichskriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert. Wegen

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = -\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{x} \overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=}} -\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ergibt sich

$$\int_2^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_2^b = F(b) - F(2) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} -F(2) = \frac{\ln 2 + 1}{2};$$

damit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ und folglich auch die zu betrachtende Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.