MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 1
20.04.2016

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Einschränkung f des natürlichen Logarithmus auf das abgeschlossene Intervall $[n, n+1]$, es ist also

$$f : [n, n+1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x.$$

Damit ist f differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in [n, n+1]$; insbesondere genügt f den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[n, n+1]$ und Differenzierbarkeit auf $]n, n+1[$. Der Mittelwertsatz liefert nun ein $\xi \in]n, n+1[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{\xi} = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Wegen

$$n < \xi < n+1 \qquad \text{folgt} \qquad \frac{1}{n} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{n+1},$$

so daß sich insgesamt

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n},$$

insbesondere also die Behauptung

$$\frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n}$$

ergibt. Damit gilt die Beziehung

$$\frac{1}{k+1} \le \ln(k+1) - \ln(k) \le \frac{1}{k}$$

auch für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, und man erhält zum einen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) =$$
$$= \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

und zum anderen

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-1=\left(1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)-1=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leq$$
$$\leq\sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1)-\ln(k))=\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)-\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k)=$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\ln(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k)=\ln(n)-\ln 1=\ln(n).$$

2. Die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sin\frac{x^3+x}{2},$$

ist als Verknüpfung des Sinus und einer Polynomfunktion stetig und differenzierbar, und für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt mit der Kettenregel

$$f'(x)=\left(\cos\frac{x^3+x}{2}\right)\cdot\frac{3\,x^2+1}{2}.$$

Seien nun x, $y\in[-1,1]$; da für $x=y$ die zu zeigende Ungleichung trivial ist, können wir $x\neq y$ und damit sogar $x>y$ annehmen. Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion f auf dem Intervall $[y,x]$ an und erhalten ein $\xi\in\,]y,x[$ mit

$$f(x)-f(y)=f'(\xi)\cdot(x-y).$$

Wegen $\xi\in\,]y,x[\,\subseteq[-1,1]$ ist $-1\leq\xi\leq 1$, also $-1\leq\xi^3\leq 1$, und damit $-2\leq\xi^3+\xi\leq 2$, also $-1\leq\frac{\xi^3+\xi}{2}\leq 1$; aufgrund des Monotonieverhaltens des Cosinus erhält man also $\cos\frac{\xi^3+\xi}{2}\geq\cos 1$. Ferner ist $\xi^2\geq 0$ und damit $\frac{3\,\xi^2+1}{2}\geq\frac{1}{2}$, woraus sich

$$f'(\xi)=\underbrace{\cos\frac{\xi^3+\xi}{2}}_{\geq\cos 1}\cdot\underbrace{\frac{3\,\xi^2+1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}}\geq\frac{\cos 1}{2}>0$$

ergibt. Zusammenfassend erhält man

$$\left|\sin\frac{x^3+x}{2}-\sin\frac{y^3+y}{2}\right|=|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\cdot|x-y|\geq\frac{\cos 1}{2}\cdot|x-y|.$$

3. a) Wir weisen nach, daß die gegebene Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|^2$$

für alle x, $y\in\mathbb{R}$ an jeder Stelle $a\in\mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Ableitung $f'(a)=0$ besitzt. Für jedes $x\in\mathbb{R}$ mit $x\neq a$ gilt nach Voraussetzung

$$|f(x)-f(a)|\leq|x-a|^2$$

und damit für den Differenzenquotienten

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| = \frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|} \leq \frac{|x-a|^2}{|x-a|} = |x-a| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0,$$

so daß sich für den Differentialquotienten

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$$

ergibt.

b) Wir weisen nach, daß für alle $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ stets $f(a) = f(b)$ gilt; damit ist f eine konstante Funktion. Die Einschränkung $f|_{[a,b]} : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und erfüllt damit insbesondere die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung; damit gibt es ein $\xi \in\,]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \underset{\text{gemäß a)}}{=} 0, \qquad \text{also} \qquad f(a) = f(b).$$

4. Da die beiden Funktionen $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar sind, ist auch ihre Differenz

$$h : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) - f(x),$$

stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar, und wegen $f(a) < g(a)$ sowie $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in\,]a,b[$ gilt

$$h(a) = g(a) - f(a) > 0$$

sowie

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0$$

für alle $x \in\,]a,b[$. Da $f(a) < g(a)$ bereits nach Voraussetzung gilt, sei $x \in\,]a,b]$; wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion h auf dem Intervall $[a,x]$ an und erhalten ein $\xi \in\,]a,x[$ mit

$$h(x) - h(a) = \underbrace{h'(\xi)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x-a)}_{>0} \geq 0, \qquad \text{also} \qquad h(x) \geq h(a) > 0$$

und damit $f(x) < g(x)$.