MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Klausur
07.10.2016

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Es seien $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ und $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$ sowie $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$. Dann gilt nach der Regel von de l'Hospital: existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne), so existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$, und beide Grenzwerte stimmen überein.

b) Zu betrachten ist der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^x - 1}{x\ln x};$$

für die Nennerfunktion erhält man mit der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{„\frac{\pm\infty}{\pm\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0,$$

und für die Zählerfunktion ergibt sich damit

$$\lim_{x\to 0+} (x^x - 1) = \lim_{x\to 0+} \Big(\exp\underbrace{(x\ln x)}_{\to 0} - 1\Big) \underset{\text{exp stetig}}{=} \underbrace{\exp(0)}_{=1} - 1 = 0.$$

Folglich ergibt sich unter Verwendung der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{x^x - 1}{x\ln x} &\underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\exp'(x\ln x)\cdot(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x})}{(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x})} \\ &= \lim_{x\to 0+} \exp\underbrace{(x\ln x)}_{\to 0} \underset{\text{exp stetig}}{=} \exp(0) = 1.\end{aligned}$$

c) Zunächst ist jede Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\sin(\pi\, x)}{\ln x} \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

in allen Punkten $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (als Quotient des Sinus und des Logarithmus) stetig; damit ist f genau dann eine stetige Funktion, wenn f auch im Punkte $a = 1$ stetig ist, also

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

gilt; dabei gilt

$$\lim_{x\to 1} \sin(\underbrace{\pi\, x}_{\to\pi}) \underset{\sin\ \text{stetig}}{=} \sin\pi = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 1} \ln x \underset{\ln\ \text{stetig}}{=} \ln 1 = 0,$$

und unter Verwendung der Regel von de l'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi\, x)}{\ln x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\pi\cdot\cos(\pi\, x)}{\frac{1}{x}} \underset{\cos\ \text{stetig}}{=} \frac{\pi\cdot\cos\pi}{1} = -\pi.$$

Folglich gibt es genau eine stetige Funktion mit den gewünschten Eigenschaften, und für diese gilt $f(1) = -\pi$.

2. a) Die Integrandenfunktion

$$\varphi : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\cos x},$$

ist (als Quotient einer konstanten Funktion und des Cosinus) stetig; damit ist nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ihre Integralfunktion

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos t}\, dt,$$

differenzierbar mit

$$f'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{für alle} \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

b) Die Funktion $f' = \varphi$ ist (als Quotient zweier beliebig oft differenzierbarer Funktionen) beliebig oft differenzierbar; damit ist auch die Funktion f beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ gilt

$$f''(x) = \varphi'(x) = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

sowie

$$\begin{aligned} f'''(x) = \varphi''(x) &= \frac{\cos x\cdot\cos^2 x - \sin x\cdot(2\cos x\cdot(-\sin x))}{(\cos^2 x)^2} \\ &= \frac{\cos x\cdot\left(\cos^2 x + 2\sin^2 x\right)}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x}. \end{aligned}$$

Wegen

$$f(0) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad f'(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f''(0) = 0$$

ergibt sich für das zweite Taylorpolynom T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ damit

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 = x \qquad \text{für alle} \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

c) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, wobei es zu jedem $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und x mit

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\, x^3$$

gibt; da $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$ gilt auch $\xi \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$, also $\cos\xi \geq \frac{1}{2}$, und wir erhalten

$$|f'''(\xi)| = \left|\frac{\cos^2\xi + 2\sin^2\xi}{\cos^3\xi}\right| = \Big(\underbrace{\cos^2\xi}_{\leq 1} + 2\cdot\underbrace{\sin^2\xi}_{\leq 1}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{\cos\xi}}_{\leq 2}\Big)^3 \leq 24$$

und folglich die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\, x^3\right| = \frac{1}{6}\cdot\underbrace{|f'''(\xi)|}_{\leq 24}\cdot\underbrace{|x|^3}_{\leq(\frac{\pi}{3})^3} \leq \frac{4\,\pi^3}{27}.$$

3. a) Die gegebene Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\, x^{2n}.$$

konvergiert zunächst in ihrem Entwicklungspunkt $a = 0$; für $x \neq 0$ gilt

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\, x^{2n} \neq 0 \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N},$$

und man erhält

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^n\, x^{2n+2}}{(n+1)\,(2n+1)}\cdot\frac{n\,(2n-1)}{(-1)^{n-1}\, x^{2n}}\right| = \left|(-1)\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot x^2\right| \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\cdot x^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0}\cdot\frac{2-0}{2+0}\cdot x^2 = x^2.\end{aligned}$$

Folglich ist die Potenzreihe nach dem Quotientenkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 < 1$, also mit $|x| < 1$, (absolut) konvergent sowie
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 > 1$, also mit $|x| > 1$, divergent;

damit besitzt sie den Konvergenzradius $\varrho = 1$.

b) Die von der gegebenen Potenzreihe auf $]-\varrho, \varrho[$ definierte Funktion

$$f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\, x^{2n},$$

ist gemäß dem Hauptsatz über Potenzreihen beliebig oft (insbesondere also zweimal) differenzierbar, und für alle $x \in]-1, 1[$ ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}\,\big(2n\cdot x^{2n-1}\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{2n-1}\, x^{2n-1}$$

sowie

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1} \; \left((2n-1) \cdot x^{2n-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot (-1)^{n-1}\right) x^{2n-2}$$

(Potenzreihen lassen sich „gliedweise" differenzieren); unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe erhält man schließlich

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot (-1)^{n-1}\right) x^{2n-2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(x^2\right)^{n-1} = \\ &= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^{n} \underset{|-x^2|=x^2<1}{=} 2 \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

c) Aus der in b) gewonnenen Darstellung von f'' ergibt sich zunächst

$$f'(x) = 2 \arctan x + c_1 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \left]-1, 1\right[$$

mit einer Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$; wegen

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1} \; 0^{2n-1} = 0 \qquad \text{und} \qquad \arctan 0 = 0$$

erhält man $c_1 = 0$, also $f'(x) = 2 \arctan x$ für alle $x \in \left]-1, 1\right[$. Wegen

$$\begin{aligned} \int \underbrace{2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\arctan x}_{v(x)} \, dx &= \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\arctan x}_{v(x)} - \int \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{v'(x)} \, dx = \\ &= 2x \arctan x - \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = 2x \arctan x - \ln\left(1+x^2\right) + C \end{aligned}$$

ergibt sich dann

$$f(x) = 2x \arctan x - \ln\left(1+x^2\right) + c_2 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \left]-1, 1\right[$$

mit einer Konstante $c_2 \in \mathbb{R}$; wegen

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)} \; 0^{2n} = 0$$

sowie

$$\arctan 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \ln\left(1+0^2\right) = \ln 1 = 0$$

erhält man $c_2 = 0$, also $f(x) = 2x \arctan x - \ln(1+x^2)$ für alle $x \in \left]-1, 1\right[$.

4. a)
   - Eine auf dem nichtleeren Intervall $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ erklärte Abbildung

$$f : I \to \mathbb{R}^n, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

heißt *Kurve,* wenn ihre n Koordinatenfunktionen

$$f_1 : I \to \mathbb{R}, \quad \ldots, \quad f_n : I \to \mathbb{R}$$

stetig sind.

- Eine Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ heißt differenzierbar, wenn ihre n Koordinatenfunktionen differenzierbar sind; in diesem Fall heißt

$$f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der Tangentialvektor von f zu $t \in I$.

- Ist eine Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ stetig differenzierbar, sind also ihre n Koordinatenfunktionen stetig differenzierbar, so ist sie auch rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge gilt

$$L = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt.$$

b) Zu betrachten ist die Kurve

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) = (2 \sin t + \cos t,\ \sin t + 2 \cos t,\ 2 \sin t - 2 \cos t),$$

mit den drei Koordinatenfunktionen

$$\begin{aligned} f_1 &: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, & f_1(t) &= 2 \sin t + \cos t, \\ f_2 &: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, & f_2(t) &= \sin t + 2 \cos t, \\ f_3 &: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, & f_3(t) &= 2 \sin t - 2 \cos t; \end{aligned}$$

diese sind (als Linearkombinationen von Sinus und Cosinus) stetig differenzierbar, und für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt

$$f_1'(t) = 2 \cos t - \sin t, \quad f_2'(t) = \cos t - 2 \sin t, \quad f_3'(t) = 2 \cos t + 2 \sin t,$$

womit sich der Tangentialvektor

$$f'(t) = (2 \cos t - \sin t,\ \cos t - 2 \sin t,\ 2 \cos t + 2 \sin t)$$

mit

$$\begin{aligned} \|f'(t)\|^2 &= (2 \cos t - \sin t)^2 + (\cos t - 2 \sin t)^2 + (2 \cos t + 2 \sin t)^2 \\ &= \left(4 \cos^2 t - 4 \cos t \sin t + \sin^2 t\right) + \left(\cos^2 t - 4 \cos t \sin t + \right. \\ &\qquad \left. + 4 \sin^2 t\right) + \left(4 \cos^2 t + 8 \cos t \sin t + 4 \sin^2 t\right) \\ &= 9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t = 9 \cdot \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} = 9 \end{aligned}$$

und damit

$$\|f'(t)\| = \sqrt{9} = 3$$

ergibt. Die Kurve f ist stetig differenzierbar, mithin rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge gilt

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} 3\, dt = 3 \cdot 2\pi = 6\pi.$$